02013423006990152

ΕΦΗΜΕΡΙΣ ΤΗΣ ΚΥΒΕΡΝΗΣΕΩΣ

ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑΣ

ΤΕΥΧΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ Αρ. Φύλλου 1342

30 Ιουνίου 1999

ΑΠΟΦΑΣΕΙΣ

Αριθ. Γ2/2861

Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Γυμνασίου και Ενιαίου Λυκείου.

Ο ΥΠΟΥΡΓΟΣ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

Έχοντας υπόψη:

1. Τις διατάξεις του εδαφ. γ΄ της παραγράφου 11 του άρθρου 5 του Ν. 1566/85, όπως τροποποιήθηκε και ισχύει με τις διατάξεις των παραγράφων 1 και 2 του άρθρου 7 του Ν. 2525/97 «Ενιαίο Λύκειο, πρόσβαση των αποφοίτων στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση, αξιολόγηση του εκπαιδευτικού έργου και άλλες διατάξεις» (ΦΕΚ 188/τ.Α΄).

2. Την εισήγηση του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου, όπως αυτή διατυπώθηκε στην με αριθ. 38/97 πράξη του Τμήματος Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

3. Τις διατάξεις του άρθρου 29ª του Ν. 1558/83 ΦΕΚ 137/τ.Α΄, όπως συμπληρώθηκε με το άρθρο 27 του Ν. 2081/92 (ΦΕΚ 154/τ.Α΄) και τροποποιήθηκε με το άρθρο 1 παραγρ. 2º του Ν. 2469/97 (ΦΕΚ 38/τ.Α΄) και το γεγονός ότι από την απόφαση αυτή δεν προκαλείται δαπάνη εις βάρος του Κρατικού Προϋπολογισμού.

4. Την αναγκαιότητα ορισμού νέου Προγράμματος Σπουδών για το μάθημα των Μαθηματικών Γυμνασίου - Λυκείου με βάση το οποίο θα συγγραφούν τα βιβλία που προβλέπονται από τις διατάξεις της παραγράφου 3 του άρθρου 7 του Ν. 2525/97, αποφασίζουμε:

Καθορίζουμε το Πρόγραμμα Σπουδών του μαθήματος των Μαθηματικών Γυμνασίου και Ενιαίου Λυκείου ως εξής:

Α. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ενα Πρόγραμμα Σπουδών (Π.Σ.) είναι ένα ευρύ λειτουργικό σχέδιο διδασκαλίας το οποίο διαπραγματεύεται λεπτομερώς θέματα που αφορούν:

- Τις μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες που πρέπει να αποκτήσουν οι μαθητές σε μια συγκεκριμένη τάξη και
- Τον τρόπο με τον οποίο θα επιτευχθεί η απόκτηση αυτών των γνώσεων και δεξιοτήτων.

Εμμέσως ένα Π.Σ. δίνει κατευθύνσεις για το τι μπορούν να κάνουν οι διδάσκοντες για να βοηθήσουν τους μαθητές τους, και για το ποιες διδακτικές συνθήκες πρέπει να δημιουργηθούν στην τάξη ώστε οι μαθητές να φθάσουν στην επιθυμητή γνώση.

Τα θεωρητικά - ερευνητικά δεδομένα που ελήφθησαν υπόψη κατά τη σύνταξη του Π.Σ. των Μαθηματικών του Γυμνασίου είναι:

Ι.

Η διδασκαλία των Μαθηματικών οργανώνεται στη βάση μιας αρμονικής συνύπαρξης ενός σχεδιασμού κατάλληλων και πλούσιων δραστηριοτήτων και ενός προγραμματισμού μιας επιθυμητής τελικής συμπεριφοράς.

Έτσι στη δεύτερη στήλη του Π.Σ. αναγράφονται λεπτομερώς οι επιθυμητοί στόχοι, ενώ στην τρίτη δίνονται οδηγίες και αναφέρονται ενδεικτικά παραδείγματα προβλημάτων και δραστηριοτήτων μέσω των οποίων οι στόχοι αυτοί θα υλοποιηθούν.

Για τη σωστή επιλογή μιας δραστηριότητας επισημαίνεται ότι:

(1) Μια δραστηριότητα πρέπει:

- Να είναι κατανοητή από όλους τους μαθητές και να μην επιτρέπει παρανοήσεις και υπονοούμενα.
- Να αφήνει περιθώρια για έρευνα και αυτενέργεια.
- Να ενθαρρύνει τη συνεργατικότητα και την ομαδική εργασία, προτρέποντας τους μαθητές και τις ομάδες σε νοητικό ανταγωνισμό.
- Να μην επιτρέπει άμεση προσέγγιση σε μια και μοναδική λύση.

(2) Το πρόβλημα από το οποίο προκύπτει η δραστηριότητα, να είναι πλούσιο σε εμπλεκόμενες έννοιες, να είναι αρκετά σημαντικό αλλά όχι δύσκολο, ώστε να μπορέσει ο μαθητής να ανταπεξέλθει.

(3) Η εργασία του προβλήματος να μπορεί να γίνει (όπου αυτό είναι δυνατόν) σε δύο τουλάχιστον πλαίσια (π.χ. αριθμητικό - γραφικό), μεταξύ των οποίων ο μαθητής θα μπορέσει να κάνει τις κατάλληλες αντιστοιχίσεις.

(Νοητικά τεχνάσματα, puzzle κτλ. δεν νοούνται ως δραστηριότητες).

ΙΙ.

Η διάρθρωση του μαθήματος των Μαθηματικών γύρω από ερευνητικές δραστηριότητες καθ'όλη τη διάρκεια του Γυμνασίου θα προετοιμάσει με τον καταλληλότερο τρόπο τους μαθητές στο να αντιληφθούν το νόημα της τυπικής μαθηματικής απόδειξης που θα συναντήσουν στο Λύκειο.

Τα τελευταία είκοσι χρόνια, παγκοσμίως, μαθηματικοί

και εκπαιδευτικοί συμφωνούν στο ότι μια απόδειξη είναι ένα σύνολο επιχειρημάτων που στοχεύουν στην επικύρωση ενός ισχυρισμού και που μπορούν να διατυπώνονται κάτω από οποιαδήποτε μορφή, αρκεί να πείθουν.

Η ουσία της απόδειξης βρίσκεται κυρίως στη διαπραγμάτευση του νοήματος μέσω μιας κοινωνικής διαδικασίας παρά στην εφαρμογή τυπικών κριτηρίων εκ των έξωθεν. Συνήθως, κατά τη διάρκεια των Μαθηματικών παρουσιάζεται η θεωρία που θέλουμε να διδάξουμε στην τελική της μορφή, ενώ θα έπρεπε να δώσουμε την ευκαιρία στους μαθητές να συμμετάσχουν σε όλες τις φάσεις του δημιουργικού κύκλου της μαθηματικής έρευνας. Οι συνήθεις διδακτικές προσεγγίσεις τείνουν να προσφέρουν στους μαθητές το προϊόν της μαθηματικής σκέψης, παρά τη διαδικασία του μαθηματικού συλλογισμού, κάτι που μπορεί να επιτευχθεί μέσω της επεξεργασίας κατάλληλων δραστηριοτήτων.

III.

Είναι σημαντικό να παρέχονται στους μαθητές δικλείδες ασφαλείας στην αναζήτηση της γνώσης. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές πρέπει να έχουν τη δυνατότητα πολλαπλής προσέγγισης μιας έννοιας:

- Μέσω διαφόρων τύπων αναπαραστάσεων (συμβολικά, με γραφικές παραστάσεις, με πίνακες, με γεωμετρικά σχήματα).
- Διαθεματικά (Φυσική, Βιολογία, Περιβαλλοντική Εκπαίδευση είναι γνωστικές περιοχές που χρησιμοποιούν Μαθηματικά, αλλά και που προσφέρουν υλικό για τη μαθηματική προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών).
- Με αναφορά στην ιστορία των Μαθηματικών (η ιστορία των Μαθηματικών είναι ένα πεδίο πλούσιο σε ιδέες για τη διδακτική προσέγγιση μιας μαθηματικής έννοιας).

IV.

Κάθε μαθηματική έννοια έχει διπλή διδακτική υπόσταση: Είναι συγχρόνως εργαλείο και αντικείμενο μάθησης. Αυτό σημαίνει ότι αν σε κάποια ενότητα μια έννοια αποτελεί αντικείμενο μελέτης, στη συνέχεια η έννοια αυτή θα αποτελέσει εργαλείο για την κατασκευή και την κατανόηση νέων εννοιών ή διαδικασιών.

Είναι επομένως σημαντικό και πρέπει να τονιστεί ότι ένα Πρόγραμμα Σπουδών δεν περιέχει απλά ένα σύνολο ασύνδετων εννοιών, αλλά ένα δίκτυο " συγγενών " εννοιών. Πρέπει επομένως στη υλοποίηση του να επιχειρείται η ένταξη κάθε έννοιας σε ένα ευρύτερο μαθηματικό πλαίσιο.

Κατά τη σύνταξη των Π.Σ. ελήφθησαν ακόμα υπόψη και τα εξής:

(1) Να μην παρατηρούνται στην ύλη επικαλύψεις από τάξη σε τάξη και κυρίως να υπάρχει συνέχεια στη διδακτέα ύλη του Δημοτικού και του Γυμνασίου, ώστε να αποφεύγονται οι περιττές επαναλήψεις

(2) Η διδακτέα ύλη να περιορίζεται στα στοιχεία που από επιστημονική άποψη είναι ουσιώδη και από παιδαγωγική γόνιμα, ώστε οι μαθητές να μην έχουν περιττό φόρτο και ταλαιπωρούνται άσκοπα.

(3) Η διδακτέα ύλη να προσφέρεται με τέτοιο τρόπο, ώστε να επιδιώκεται πρώτα απ΄όλα η ανάπτυξη της κριτικής ικανότητας και της δημιουργικότητας του μαθητή.

(4) Με τη διδακτέα ύλη να ευαισθητοποιείται ο μαθητής σε θέματα περιβαλλοντικής εκπαίδευσης, αγωγής υγείας, τεχνολογίας και άλλων επιστημών και σε οτιδήποτε άλλο τον προετοιμάζει για να ζήσει ως ενεργό μέλος μιας κοινωνίας ενταγμένης στην Ευρωπαϊκή Ένωση και στον κόσμο γενικότερα.

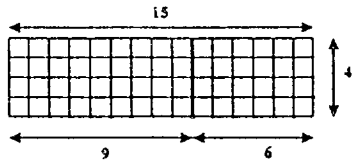
(5) Η διδακτέα ύλη να είναι προσαρμοσμένη στις νοητικές δυνατότητες, στις ανάγκες και στα ενδιαφέροντα των μαθητών για τους οποίους προορίζεται και να μπορεί να διδαχθεί με άνεση στο διατιθέμενο ωρολόγιο πρόγραμμα για κάθε τάξη.

(6) Να χρησιμοποιείται ενιαία ορολογία στο Δημοτικό και στο Γυμνάσιο.

Β. Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά της Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Περιεχόμενα	Στόχοι	Οδηγίες
1. ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΜΕΓΕΘΗ		
Φυσικοί αριθμοί	Οι μαθητές πρέπει: • Να κατανοήσουν τους φυσικούς αριθμούς ως αποτέλεσμα απαρίθμησης • Να μπορούν να διαβάζουν και να γράφουν φυσικούς αριθμούς • Να αναγνωρίζουν την αξία των ψηφίων ενός φυσικού αριθμού • Να μπορούν να παριστάνουν τους φυσικούς αριθμούς με σημεία μιας ευθείας • Να μπορούν να συγκρίνουν φυσικούς αριθμούς • Να μπορούν να στρογγυλοποιούν φυσικούς αριθμούς	Το περιεχόμενο της ενότητας έχει διδαχθεί στο Δημοτικό, επομένως η διδασκαλία της θα έχει εδώ <u>επαναληπτικό</u> χαρακτήρα, με σκοπό την καλύτερη εμπέδωση των σχετικών εννοιών και την διεύρυνση του συνόλου των μαθητών που θα ανταποκρίνονται με επάρκεια στον αριθμητικό λογισμό. Η επανάληψη θα γίνει μέσα από κατάλληλα προβλήματα και δραστηριότητες όπως π.χ. ■ *Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις σύμφωνα με την προσωπική σας εκτίμηση και στη συνέχεια να αναζητήσετε τη σωστή απάντηση:* i) *Πληθυσμός της γης* ii) *Πληθυσμός της Ελλάδας* iii) *Πληθυσμός της πόλης σας* iv) *Πλήθος μαθητών του σχολείου σας* v) *Πλήθος μαθητών των Γυμνασίων της Αθήνας* vi) *Τόνοι ημερήσιων απορριμμάτων στην Αθήνα* ■ *Να γράψετε τον αριθμό δέκα χιλιάδες τριάντα δυο* ■ *Να γράψετε σε φυσική γλώσσα τους αριθμούς 23046, 230460, 1202002* ■ *Να βάλετε σε αύξουσα τάξη, δηλαδή από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς ... , χρησιμοποιώντας τα σύμβολα >, <* ■ *Να βάλετε σε φθίνουσα τάξη δηλαδή από το μεγαλύτερο στο μικρότερο...* ■ *Τι μεταβολή παθαίνει ο αριθμός 245128 αν εναλλάξουμε το ψηφίο των εκατοντάδων με το ψηφίο των δεκάδων; κτλ.*

		■ *Να στρογγυλοποιήσετε στην επόμενη δεκάδα όσους από τους παρακάτω φυσικούς επιτρέπεται:* *i) απόσταση 138 km* *ii) ταχ. Κώδ. 15342* *iii) βάρος 20501 tn* iv) αριθ. τηλ. 6016795
Πρόσθεση - Αφαίρεση - Πολ/σιασμός φυσικών αριθμών	**Οι μαθητές πρέπει:** • **Να εκτελούν με ευχέρεια τις πράξεις της πρόσθεσης , της αφαίρεσης και του πολλαπλασιασμού φυσικών αριθμών** • **Να χρησιμοποιούν την αντιμεταθετική και την προσεταιριστική ιδιότητα των βασικών πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού** • **Να εφαρμόζουν την επιμεριστική ιδιότητα στον υπολογισμό παραστάσεων** • **Να εκτελούν τις πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση με την προβλεπόμενη προτεραιότητα**	**Η διδασκαλία των πράξεων της πρόσθεσης, της αφαίρεσης και του πολλαπλασιασμού φυσικών έχει <u>επαναληπτικό</u> χαρακτήρα και η επανάληψη θα γίνει μέσα από ασκήσεις που αφορούν εφαρμογές των ιδιοτήτων των πράξεων και μέσα από κατάλληλα προβλήματα και δραστηριότητες.** Για παράδειγμα: ■ *i) Ποια ιδιότητα μας επιτρέπει να γράφουμε : 150+73+27=150+100* *ii) ποιες ιδιότητες μας επιτρέπουν να γράφουμε :* *1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=* *(1+10)+(2+9)+(3+8)+(4+7)+(5+6)=* *11+11+11+11+11= 55.* *iii) Υπολογίστε τώρα το άθροισμα των φυσικών από το 1 μέχρι και 100.* ■ *Για κάθε θέση στον παρακάτω πολλαπλασιασμό, διαλέξτε έναν από τους αριθμούς 1, 2 ,3, 4, 5 ,διαφορετικό κάθε φορά, ώστε να πάρετε:* *i) το μεγαλύτερο δυνατό γινόμενο* *ii)το μικρότερο δυνατό γινόμενο* □ □ □ x □ □ *Πόσοι είναι <u>οι διαφορετικοί</u> πολλαπλασιασμοί;* ■ *Χωρίς να εκτελέσετε τις παρακάτω πράξεις να βρείτε πόσα ψηφία θα έχει κάθε φορά το αποτέλεσμα:* i) *134+689* ii) *134+989* iii) *1246 - 348* ■ *Πόσα ψηφία θα γραφτούν για να αριθμήσουμε τις 352 σελίδες ενός βιβλίου;*

		Ιδιαίτερη σημασία πρέπει να δοθεί στην επιμεριστική ιδιότητα που αποτελεί τη βάση του αριθμητικού λογισμού, αφού συνδέει τις δυο βασικές πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. *Είναι σκόπιμο η επιμεριστική ιδιότητα να εξηγηθεί και γεωμετρικά:*  $4\cdot(9+6)=4\cdot 9+4\cdot 6$ $4\cdot(15-6)=4\cdot 15-4\cdot 6$ Οι μαθητές να διατυπώσουν στην καθομιλούμενη την επιμεριστική ιδιότητα.
Πολλαπλάσια φυσικού αριθμού- Η έννοια της μεταβλητής	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: • Να γράφουν τα πολ/πλάσια ενός φυσικού αριθμού • Να βρίσκουν τα κοινά πολλαπλάσια και το Ε.Κ.Π φυσικών αριθμών • Να παριστάνουν με μεταβλητές τα πολλαπλάσια ενός φυσικού	Η διδασκαλία των πολλαπλασίων φυσικού αριθμού έχει <u>επαναληπτικό</u> χαρακτήρα και η επανάληψη θα γίνει μέσα από προβλήματα και δραστηριότητες όπως π.χ. ■ *Να βρείτε πολλαπλάσια του αριθμού 8 και του αριθμού 14.* i) *Ποια είναι τα κοινά πολλαπλάσια των δυο αριθμών;* ii) *Ποιο είναι το ΕΚΠ;* iii) *Παρατηρείτε κάποια σχέση μεταξύ του ΕΚΠ και των άλλων κοινών πολλαπλασίων;* ■ *Τρία πλοία επισκέπτονται ένα νησάκι ,το πρώτο ανά 2 μέρες, το δεύτερο ανά 4 μέρες και το τρίτο ανά 5 μέρες. Ξεκίνησαν συγχρόνως τα δρομολόγια από το νησί την πρώτη Ιουλίου. Γιατί στις είκοσι του μήνα το λιμάνι του νησιού παρουσίαζε μεγάλη κίνηση; Πότε αναμένεται να επαναληφθεί το φαινόμενο αυτό;* Στο σημείο αυτό θα γίνει για πρώτη φορά η εισαγωγή της έννοιας της <u>μεταβλητής</u> μέσα από την ανάγκη έκφρασης «όλων» των πολλαπλασίων ενός φυσικού. Οι μαθητές να ασκηθούν μέσα από κατάλληλες ασκήσεις και δραστηριότητες στη χρήση μεταβλητών, όπως π.χ.

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>■ i) Να συμπληρώσετε τον πίνακα με τα πολλαπλάσια του 3:
<table><tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>...</td><td>ν</td></tr><tr><td>0</td><td>3</td><td>6</td><td>9</td><td>...</td><td>;</td></tr></table>
ii) Να εκφράσετε όλους τους άρτιους αριθμούς
iii) Να εκφράσετε όλους τους περιττούς αριθμούς
iv) Ποιος είναι ο επόμενος του ν;
v) Ποιος είναι ο προηγούμενος του ν;

■ Με τη βοήθεια μεταβλητών να διατυπώσετε
i)την αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης και του πολ/σμού
ii)την προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης και του πολ/σμού
iii)την επιμεριστική ιδιότητα
iv) να γράψετε συντομότερα τις παραστάσεις:
1. 3α +5α
2. 8χ +7χ +4χ
3. 15β -9β</td>
</tr>
<tr>
<td>Η έννοια της εξίσωσης</td>
<td>Οι μαθητές πρέπει
• Να κατανοήσουν την έννοια της εξίσωσης
• Να ελέγχουν αν κάποιος αριθμός είναι λύση εξίσωσης
• Να λύνουν στο N εξισώσεις της μορφής:
α +χ =β, χ -α =β, α -χ =β
• Να λύνουν <u>απλά</u> προβλήματα με τη βοήθεια των εξισώσεων</td>
<td>Η εξίσωση θεωρείται <u>καινούργια</u> έννοια για τους μαθητές.
Να παρουσιαστεί ως μια σχέση που περιέχει μεταβλητή και της οποίας ζητάμε την τιμή ώστε να προκύψει σωστή ισότητα.
Είναι ιδιαίτερα σημαντικό να κατανοήσουν οι μαθητές ότι η πρόσθεση και η αφαίρεση είναι πράξεις αντίστροφες.
Η Ιδιότητα αυτή και μόνο θα χρησιμοποιηθεί για τη λύση των εξισώσεων που περιλαμβάνονται στην ενότητα αυτή και δεν θα χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος επίλυσης εξίσωσης
(που ανήκει άλλωστε σε αναλυτικό πρόγραμμα μεγαλύτερης τάξης)
Είναι χρήσιμο μετά τη λύση κάθε εξίσωσης να γίνεται η επαλήθευση της
Να τονιστεί με παραδείγματα η διαδικασία επιλογής της μεταβλητής και η «μετάφραση» μιας πρότασης της καθομιλούμενης σε συμβολική μαθηματική γλώσσα</td>
</tr>
</table>

Δυνάμεις φυσικών	**Οι μαθητές πρέπει** • **να κατανοήσουν ότι το σύμβολο** $α^ν$ **είναι μια συντομογραφία του γινομένου** $\underbrace{α\cdot α\cdot α\cdots α}_{ν\ παράγοντες}$ • **Να μπορούν να διαβάζουν δυνάμεις** • **Να μπορούν να υπολογίζουν δυνάμεις με μικρό εκθέτη και για τις δυνάμεις του 10 να εφαρμόζουν την ισότητα:** $10^ν=1\underbrace{000...0}_{ν\ μηδενικα}$ • **Να εφαρμόζουν την προτεραιότητα των πράξεων στον υπολογισμό παραστάσεων που περιέχουν δυνάμεις και παρενθέσεις**	**Η έννοια της δύναμης θεωρείται** <u>**καινούργια**</u> **έννοια για τους μαθητές και χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στην παρουσίαση της.** **Να τονιστεί ότι** $ν\cdot α \neq α^ν$. **Να γίνει ιδιαίτερη αναφορά στις δυνάμεις** $α^2$ **και** $α^3$. Να δοθούν ασκήσεις της μορφής: ■ *Να γράψετε σε αναπτυγμένη μορφή με βάση το 10 τον αριθμό 2591* ■ *Ποιος είναι ο αριθμός* $5\cdot 10^6+3\cdot 10^4+2\cdot 10+4$ *;* **Προκειμένου να ~~κατανοήσουν~~ οι μαθητές βαθύτερα το νόημα του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης μπορεί να δοθεί δραστηριότητα της μορφής:** ■ *Να γράψετε τον αριθμό του δεκαδικού συστήματος 520 σε αριθμητικό σύστημα με βάση το 2 (δυαδικό).*
Η τέλεια διαίρεση	**Οι μαθητές πρέπει** • **Να κατανοήσουν ότι καθεμιά από τις εκφράσεις :** **i) «Ο Δ είναι πολ/σιο του δ»** **ii) « Ο δ είναι διαιρέτης του Δ»** **iii) « Ο Δ διαιρείται με τον δ», σημαίνει ότι υπάρχει φυσικός π τέτοιος ώστε Δ=δπ .** • **Να γνωρίζουν την ονομασία του κάθε γράμματος στην ισότητα Δ=δπ** • **Να γνωρίζουν ποιοι αριθμοί λέγονται** <u>**πρώτοι**</u> **και ποιοι** <u>**σύνθετοι**</u> **και να μπορούν να τους διακρίνουν.** • **Να γνωρίζουν τι είναι οι κοινοί διαιρέτες αριθμών και ποιος είναι ο ΜΚΔ.** • **Να μπορούν να αναλύουν αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και έτσι να βρίσκουν το ΕΚΠ και το ΜΚΔ** • **Να γνωρίζουν και να χρησιμοποιούν τα κριτήρια διαιρετότητας με** ♦ **2, 5 και 10** ♦ **4 και 8** ♦ **3 και 9**	**Η διδασκαλία της τέλειας διαίρεσης, της ανάλυσης αριθμού σε πρώτους παράγοντες και των χαρακτήρων διαιρετότητας έχει** <u>**επαναληπτικό**</u> **χαρακτήρα και η επανάληψη θα γίνει μέσα από κατάλληλες ασκήσεις και προβλήματα.** **Οι μαθητές να ασκηθούν στον προσδιορισμό του ΜΚΔ και του ΕΚΠ με τη μέθοδο της ανάλυσης των αριθμών σε πρώτους παράγοντες, δεδομένου ότι η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται και στην εύρεση ΕΚΠ και ΜΚΔ αλγεβρικών παραστάσεων.** **Για περαιτέρα εμβάθυνση στις έννοιες της διαιρετότητας και εξάσκηση με τις μεταβλητές μπορούν να δοθούν δραστηριότητες όπως π.χ.** ■ *Ο αριθμός ν είναι κοινός διαιρέτης των φυσικών α και β με α>β. Μπορείτε να δικαιολογήσετε ότι ο ν διαιρεί το άθροισμα α +β, τη διαφορά α-β και τα γινόμενα λ·α και μ·β ;* *Ο αριθμός 837 σύμφωνα με τα κριτήρια διαιρετότητας διαιρείται με το 9, αφού το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με 9. Αυτό δικαιολογείται ως εξής:* *έχουμε:* $837= 8\cdot 100+3\cdot 10+7$ $= 8(99+1)+3(9+1)+7$ $= 8\cdot 99+8\cdot 1+3\cdot 9+3\cdot 1+7$ $= 8\cdot 99+3\cdot 9+8+3+7$ $= (8\cdot 11+3)\cdot 9+(8+3+7)$

		Επειδή 9 /(8·11+3)·9 και 9 /(8+3+7), έχουμε ότι 9 /837. *Με ανάλογες σκέψεις να δικαιολογήσετε ότι ο αριθμός «αβγ» διαιρείται με το 9 αν 9 /(α+β+γ)* ■ *Το « κόσκινο του Ερατοσθένη» είναι ένας αλγόριθμος (διαδικασία) εύρεσης των πρώτων αριθμών. Να τον αναζητήσετε και να τον μελετήσετε.*
Η ευκλείδεια διαίρεση	**Οι μαθητές πρέπει:** • **Να μπορούν να εκτελούν μια ευκλείδεια διαίρεση** • **Να γνωρίζουν πότε μια ισότητα της μορφής Δ=δπ+υ εκφράζει ευκλείδεια διαίρεση**	**Η διδασκαλία της παραγράφου έχει <u>επαναληπτικό</u> χαρακτήρα, αλλά χρειάζεται παραπέρα εξάσκηση των μαθητών ώστε να αντιληφθούν ότι η ισότητα Δ=δπ+υ εκφράζει ευκλείδεια διαίρεση μόνο όταν ισχύει ο περιορισμός υ<δ.** **Η επανάληψη της παραγράφου θα γίνει μέσα από κατάλληλα προβλήματα και δραστηριότητες, όπως π.χ.** ■ *Ποιες από τις παρακάτω ισότητες εκφράζουν Ευκλείδεια διαίρεση και ποιος είναι σε κάθε περίπτωση ο διαιρετέος, ο διαιρέτης, το πηλίκο και το υπόλοιπο:* *150= 28·5+10* *768= 39·18+66* *296=7· 42+2* ■ *Η διαίρεση ενός αριθμού χ με 186 δίνει πηλίκο 4 και υπόλοιπο 42. Ποιος είναι ο χ;*
Δεκαδικοί αριθμοί	**Οι μαθητές πρέπει να μπορούν:** • **Να γράφουν και να διαβάζουν δεκαδικούς αριθμούς** • **Να παριστάνουν τους δεκαδικούς με σημεία μιας ευθείας** • **Να συγκρίνουν δεκαδικούς αριθμούς** • **Να στρογγυλοποιούν δεκαδικούς αριθμούς**	**Οι δεκαδικοί διδάσκονται αμέσως μετά τους φυσικούς και όχι μετά τα κλάσματα (όπως πιθανόν να αναμενόταν, αφού οι ίδιοι είναι δεκαδικά κλάσματα), λόγω της ομοιότητας που παρουσιάζουν στην εκτέλεση των πράξεων με τους φυσικούς. Στην παράγραφο των κλασμάτων προβλέπεται σχετική αναφορά. Εδώ οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν την ανάγκη χρησιμοποίησης των δεκαδικών ως αποτέλεσμα μετρήσεων.** **Η διδασκαλία της παραγράφου έχει <u>επαναληπτικό</u> χαρακτήρα και η επανάληψη θα γίνει μέσα από κατάλληλα προβλήματα και δραστηριότητες, όπως π.χ.** ■ *Στο δεκαδικό: □0, □9 λείπουν δυο ψηφία του.*

			i) *Ποιος είναι ο μεγαλύτερος δεκαδικός, χωρίς ίδια ψηφία που μπορείτε να γράψετε;* ii) *Ποιος είναι ο μικρότερος δεκαδικός, χωρίς ίδια ψηφία που μπορείτε να γράψετε;* ■ *Να βάλετε τους δεκαδικούς 4,035, 4,039, 4,5, 4,498, 4,2, 4,1235 σε αύξουσα τάξη, χρησιμοποιώντας το κατάλληλο σύμβολο της ανισότητας.* ■ *Να στρογγυλοποιήσετε το 56,94352* *i) στο δέκατο ii) στο εκατοστό iii)στο χιλιοστό iv) στο δεκάκις χιλιοστό.*
	Πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς Μονάδες μέτρησης Ο υπολογιστής τσέπης	**Οι μαθητές πρέπει** • **Να μπορούν να εκτελούν με ευχέρεια τις τέσσερις πράξεις με δεκαδικούς** • **Να γνωρίζουν τις βασικές μονάδες μέτρησης μεγεθών και να μπορούν να κάνουν μετατροπές μονάδων.** • **Να γράφουν πολύ μεγάλους αριθμούς σε τυποποιημένη μορφή.** • **Να εφαρμόζουν την προτεραιότητα των πράξεων** • **Να μπορούν να εκτελούν πράξεις με επιστημονικό υπολογιστή τσέπης (κομπιουτεράκι)**	**Η διδασκαλία της παραγράφου, με εξαίρεση την τυποποιημένη μορφή, έχει επαναληπτικό χαρακτήρα.** **Η επανάληψη θα γίνει με ασκήσεις που θα αποσκοπούν στον έλεγχο της κατανόησης των δεκαδικών και των πράξεών τους, καθώς και με δραστηριότητες και κατάλληλα προβλήματα που θα αναφέρονται σε μετρήσεις και μονάδες μέτρησης μάζας, χρόνου, μήκους, εμβαδού και όγκου.** Για παράδειγμα: ■ *Να βάλετε την υποδιαστολή σε καθένα από τα παρακάτω αποτελέσματα.* i) *7,836· 4,92=3855312* ii) *400,14:85,5=468* iii) *0,735:0,7=105* iv) *3,77:0,98=385* ■ *Χωρίς να εκτελέσετε τις πράξεις να εκτιμήσετε το αποτέλεσμα:* *i) 146·0,76* ii) *7,8·0,98* iii) *45,1·1,05* iv) *16: 0,5* v) *39,5:0,95* **Οι τύποι της περιμέτρου και του εμβαδού ορθογωνίου και τετραγώνου, καθώς και του όγκου και της επιφάνειας κύβου και ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου** **έχουν διδαχθεί στο Δημοτικό και μπορούν να χρησιμοποιούνται.** **Η τυποποιημένη μορφή των αριθμών είναι καινούργια γνώση. Για να φανεί η αναγκαιότητα της γραφής των μεγάλων αριθμών στην τυποποιημένη μορφή και για**

να εξασκηθούν οι μαθητές στη μετατροπή αυτή, είναι σκόπιμο να τους δοθούν δραστηριότητες όπως π.χ.

- *Να αναζητήσετε σε κατάλληλες πηγές και να γράψετε τις απαντήσεις στις παρακάτω ερωτήσεις:*

i) *Πόσα ερυθρά αιμοσφαίρια υπάρχουν περίπου σε έναν υγιή άνθρωπο;*

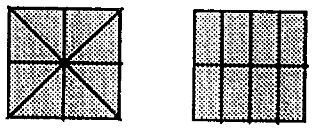
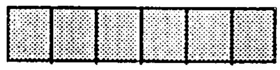
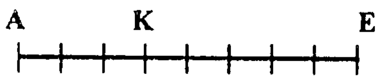
ii) *Πόσα km είναι 1 έτος φωτός;*

- *Με ένα κομπιουτεράκι τσέπης να κάνετε τον πολλαπλασιασμό 98746598 • 6798345.*

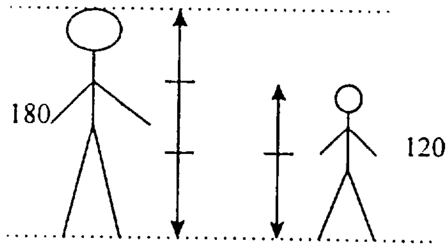
Τι αποτέλεσμα πήρατε; Να γράψετε το αποτέλεσμα σε συνηθισμένη μορφή.

Το κομπιουτεράκι πρέπει να χρησιμοποιείται για την εκτέλεση χρονοβόρων υπολογισμών, οπότε μένουν μεγαλύτερα περιθώρια για προβληματισμό και έρευνα.
Δεν πρέπει να γίνεται κατάχρηση, γιατί αυτό θα οδηγήσει τους μαθητές στην αδυναμία εκτέλεσης και των πιο απλών υπολογισμών.
Είναι επίσης χρήσιμο να ασκηθούν οι μαθητές στην εκτίμηση (μέσω στρογγυλοποίησης) του αποτελέσματος μιας πράξης ,γιατί στην καθημερινή τους ζωή αντιμετωπίζουν τέτοια προβλήματα, αλλά και γιατί είναι συνηθισμένα τα λάθη από αβλεψίες στο πάτημα των κουμπιών των υπολογιστικών μηχανών.

Επίλυση προβλημάτων	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να λύνουν προβλήματα, εδώ τεσσάρων πράξεων με φυσικούς και δεκαδικούς αριθμούς, και να αναπτύξουν την ικανότητα: • Εξερεύνησης μιας κατάστασης • Κατασκευής ερωτήσεων και προβλημάτων με βάση συγκεκριμένα δεδομένα • Πολλαπλών διατυπώσεων του ίδιου προβλήματος • Παρουσίασης διαδικασιών, αποτελεσμάτων κτλ. • Σύνθεσης νέων προβλημάτων που προκύπτουν από τα ήδη λυμένα • Αναγνώρισης ανάλογων καταστάσεων • Περιγραφής εξωμαθηματικών αντικειμένων με μαθηματική γλώσσα • Ανακάλυψης μαθηματικών εννοιών σε καθημερινά πράγματα • Χρησιμοποίησης των αριθμών στην καθημερινή ζωή.	Τα προβλήματα μπορεί να προέρχονται από τα μαθηματικά ή από τις εμπειρίες και το περιβάλλον των μαθητών. Η παράγραφος αυτή είναι μια καλή ευκαιρία για να παρουσιαστούν και διάφορες *ευρετικές στρατηγικές* όπως: ♦ Σχεδιάζω έναν πίνακα, ένα διάγραμμα ή μια γραφική παράσταση ♦ Δοκιμάζω απλούστερους αριθμούς ♦ Εργάζομαι με ειδικές περιπτώσεις ♦ Βρίσκω ένα μοντέλο ♦ Υποθέτω και ελέγχω Όπου είναι δυνατόν να δοθούν ιστορικά παραδείγματα. Το σημαντικό είναι οι στρατηγικές αυτές να χρησιμοποιούνται σε όλη την υλοποίηση του προγράμματος και όχι μόνο σε ειδικά επιλεγμένα προβλήματα.

2. ΚΛΑΣΜΑΤΑ		Το κεφάλαιο αυτό έχει <u>επαναληπτικό</u> χαρακτήρα, αφού οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με την έννοια του κλάσματος από το Δημοτικό. Στόχος είναι η περαιτέρω εμπέδωση της έννοιας, η καλύτερη κατανόηση των πράξεων και η απόκτηση ικανότητας επίλυσης σύνθετων προβλημάτων. Η επιδίωξη των στόχων αυτών θα γίνει μέσα από ολοκληρωμένες δραστηριότητες και μέσα από κατάλληλα παραστατικά μοντέλα.
Η έννοια του κλάσματος	**Οι μαθητές πρέπει:** • **Να κατανοήσουν την έννοια του κλάσματος μέσα από διαδικασίες χωρισμού σε μέρη ενός «όλου».**	Για παράδειγμα : ■ *Να μοιρασθεί ένα τετράγωνο γλυκό σε 8 παιδιά*  ■ *Να μοιρασθούν 2 πίτσες σε 3 παιδιά.. Με πόσους τρόπους μπορείς να κάνεις το μοίρασμα;* **(Να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στις ασκήσεις που προτείνουν χωρισμό σε ίσα μέρη κυκλικών αντικειμένων λόγω έλλειψης σχετικών γεωμετρικών ικανοτήτων)** ■ *Το σχήμα δείχνει μια σοκολάτα των 120gr. Πόσα κομμάτια πρέπει να κόψω για να πάρω 40gr;* 
	• **Να κατανοήσουν την έννοια του κλάσματος μέσα από διαδικασίες αναζήτησης σχέσης μεταξύ ομοειδών ποσοτήτων, από όπου θα προκύψει και η έννοια του κλάσματος ως τελεστή.**	Για παράδειγμα : ■ *Ποια είναι η σχέση του τμήματος ΑΚ με το τμήμα ΑΕ; Αν το ΑΚ είναι 24cm πόσο είναι το ΑΚ;*  *(ΑΚ=$\frac{3}{8}$ του ΑΕ. Αν ΑΚ=24cm, τότε* *ΑΚ=$\frac{3}{8}$ του24 ή σύντομα ΑΚ=$\frac{3}{8}$ x 24=9cm)* ■ *Ένα πακέτο 500 χαρτιών έχει πάχος 5 cm. Πώς θα πάρω 200 χαρτιά χωρίς να τα μετρήσω;*

- *Ένας πατέρας έχει ύψος 180 cm, ενώ ο γιος του 120 cm. Τι μέρος του ύψους του πατέρα είναι το ύψος του γιου;*



($120=\frac{2}{3}$ *του 180 ή σύντομα* $120=\frac{2}{3}\cdot 180$)

- *Τα* $\frac{3}{5}$ *των σελίδων ενός βιβλίου είναι εικονογραφημένες . Αν οι σελίδες του βιβλίου είναι 240, πόσες είναι οι εικονογραφημένες σελίδες ;*

($\frac{3}{5}$ *του 240 ή σύντομα* $\frac{3}{5}$ x 240)

- *Στο παρακάτω σχήμα το τμήμα ΓΔ είναι τα* $\frac{3}{4}$ *του ΑΒ, δηλαδή* $ΓΔ=\frac{3}{4}\cdot ΑΒ$. *Να Φτιάξε τμήματα που η σχέση τους είναι* $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}$

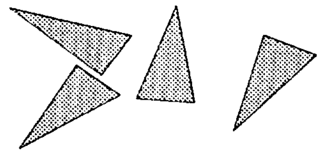


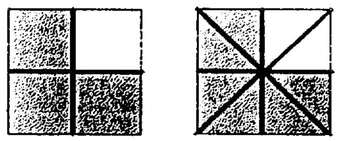
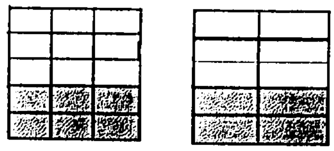
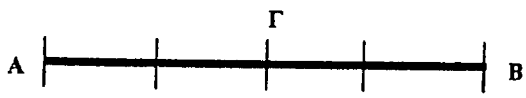


- *Με 1 λίτρο γάλα γεμίζω 8 φορές το ποτήρι μου Πόσο γάλα χωράει το ποτήρι;*
- *Έχω ένα πακέτο ζάχαρη του 1Kgr. Πώς θα πάρω περίπου 150 gr ζάχαρη με τη βοήθεια ενός φλιτζανιού;*

• Να ασκηθούν στη μέθοδο της αναγωγής στη μονάδα ώστε να μπορούν να υπολογίζουν την τιμή του μέρους από το όλο.

- *Μια δεξαμενή πετρελαίου πολυκατοικίας χωράει 2000lt. Πόσα λίτρα είναι τα* $\frac{3}{4}$ *της δεξαμενής;*

Ποσοστά	Οι μαθητές πρέπει: • Να κατανοούν την έννοια των ποσοστών και να διαπιστώνουν την χρησιμότητα τους στις εφαρμογές. • Να γράφουν ένα δεκαδικό κλάσμα ως ποσοστό και αντιστρόφως	Τα ποσοστά είναι ένας άλλος τρόπος παράστασης των κλασμάτων και των δεκαδικών αριθμών. Για παράδειγμα: $63\% = \frac{63}{100} = 0{,}63$, $815\% = \frac{815}{100} = 8{,}15$ και γενικά $\alpha\% = \frac{\alpha}{100}$ Είναι σκόπιμο να γίνουν αρκετές εφαρμογές των ποσοστών από την καθημερινή ζωή και να λυθούν προβλήματα που αναφέρονται σε -αυξήσεις και διαδοχικές αυξήσεις -μειώσεις και διαδοχικές μειώσεις -Φ.Π.Α, τόκους κτλ..
	• Να λύνουν προβλήματα με ποσοστά.	Για παράδειγμα: ■ *Επί συνόλου εγγεγραμμένων 16.000 ψήφισε το 84%. Ποιο ποσοστό δεν ψήφισε; Πόσοι ψήφισαν και πόσοι δεν ψήφισαν;*
	• Να μπορούν να υπολογίσουν την τιμή του όλου από το μέρος	Για παραδείγμα: ■ *Σε κάποια γενέθλια από την τούρτα έμειναν τα* $\frac{2}{7}$ *των κομματιών, που βλέπεις παρακάτω. Πόσα ήταν αρχικά όλα τα κομμάτια της τούρτας;*  ■ *Τα* $\frac{3}{5}$ *των σελίδων ενός βιβλίου είναι εικονογραφημένες . Αν οι εικονογραφημένες σελίδες είναι 114, πόσες σελίδες έχει το βιβλίο;*
	• Να κατανοήσουν την έννοια του κλάσματος ως πηλίκου και να μπορούν να γράφουν ένα κλάσμα ως δεκαδικό και ως ποσοστό	Η ενότητα μπορεί να διδαχτεί με προβλήματα της μορφής: *Χωρίζουμε το τμήμα ΑΒ σε 20 ίσα τμήματα. Πόσο είναι το κάθε τμήμα;*  *(Το κάθε τμήμα θα έχει μήκος* $\frac{1}{20}$ *του 42, δηλ.* $\frac{42}{20}$ *=42:20 = 2,1cm)*

		Εδώ προσφέρεται να σχολιαστούν οι περιπτώσεις των κλασμάτων $\frac{\alpha}{1}, \frac{\alpha}{\alpha}, \frac{0}{\alpha}$, να λυθούν οι εξισώσεις της μορφής $\frac{\chi-4}{3}=0, \ \frac{\chi+2}{6}=1$ και να αναφερθεί η έννοια του καταχρηστικού κλάσματος.
Ισοδύναμα κλάσματα Σύγκριση κλασμάτων	Οι μαθητές πρέπει: • Να κατανοήσουν την έννοια των ισοδύναμων κλασμάτων • Να μπορούν να απλοποιούν κλάσματα • Να μπορούν να τρέπουν κλάσματα σε ομώνυμα • Να χρησιμοποιούν τη «χιαστί» ιδιότητα : «Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, τοτε αδ=βγ » για τον έλεγχο της ισοδυναμίας των κλασμάτων	Για την κατανόηση της έννοιας των ισοδύναμων κλασμάτων πρέπει να χρησιμοποιηθούν μοντέλα που θα αναπαριστούν διαδικασίες μοιράσματος και διαδικασίες μέτρησης. Για παράδειγμα: ■  $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$  $\frac{6}{15} = \frac{4}{10}$ ■  $ΑΓ = \frac{1}{2} ΑΒ$ $ΑΓ' = \frac{2}{4} ΑΒ$ Να αναφερθεί και το <u>ανάγωγο κλάσμα</u>

- Να συγκρίνουν κλάσματα
- Να μπορούν να τοποθετούν ένα κλάσμα στην ευθεία των αριθμών

Για τη σύγκριση δυο κλασμάτων, εκτός της διαδικασίας της μετατροπής τους σε ομώνυμα, πρέπει να χρησιμοποιηθούν και άλλες ευρετικές στρατηγικές οι οποίες διευκολύνουν τη σύγκριση και προκαλούν την περιέργεια και το ενδιαφέρον των μαθητών. Για παράδειγμα:

■ Να συγκριθούν τα κλάσματα $\frac{7}{13}$ και $\frac{7}{15}$

(Σύγκριση κλασμάτων με τον ίδιο αριθμητή)

■ Να συγκριθούν τα κλάσματα $\frac{7}{22}$ και $\frac{21}{61}$

(Είναι $\frac{7}{21} = \frac{21}{63}$ κτλ.)

■ Να συγκριθούν τα κλάσματα $\frac{5}{7}$ και $\frac{4}{3}$

(Σύγκριση με τη μονάδα)

■ Να συγκριθούν τα κλάσματα $\frac{3}{7}$ και $\frac{5}{9}$

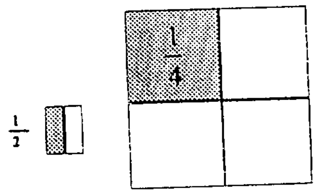
(Είναι $\frac{3}{7} < \frac{1}{2} < \frac{5}{9}$)

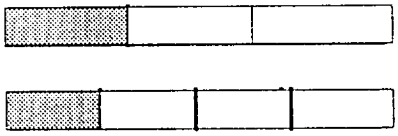
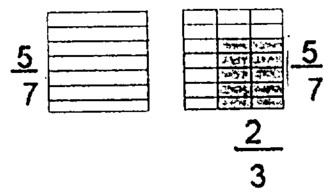
Στις δυο τελευταίες περιπτώσεις να επισημανθεί η μεταβατική ιδιότητα της ανισότητας.

■ Να συγκριθούν τα κλάσματα $\frac{159}{500}$ και $\frac{80}{249}$

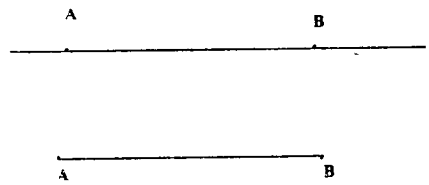
(Είναι $\frac{159}{500} = 0{,}318$ και $\frac{80}{249} \approx 0{,}321$, άρα...)

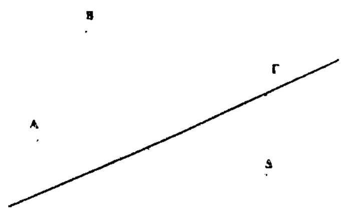
■ Από τα παρακάτω σχήματα φαίνεται να είναι $\frac{1}{4} > \frac{1}{2}$. Τι έχετε να πείτε ;

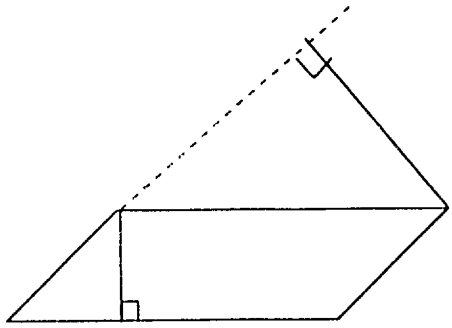
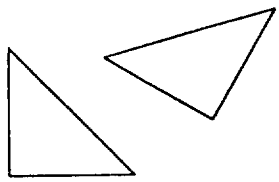
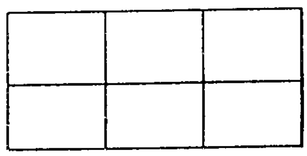


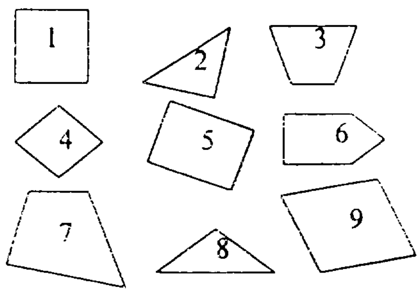
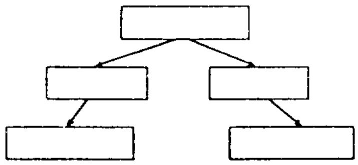
Πρόσθεση και Αφαίρεση κλασμάτων	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: • **Να εκτελούν προσθέσεις και αφαιρέσεις κλασμάτων και να λύνουν σχετικά προβλήματα.**	Για να κατανοήσουν οι μαθητές την ανάγκη μετατροπής κλασμάτων σε ομώνυμα προκειμένου να τα προσθέσουμε, πρέπει να χρησιμοποιηθούν κατάλληλα παραστατικά μοντέλα, όπως π.χ.  (Η ανάγκη δημιουργίας ίσων κομματιών για να εκτελεσθεί η πρόσθεση $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ οδηγεί φυσιολογικά στην τροπή ετερώνυμων κλασμάτων σε ομώνυμα) Το συνηθισμένο λάθος των μαθητών να προσθέτουν αριθμητές και παρονομαστές μπορεί να αντιμετωπιστεί με μια δραστηριότητα της μορφής: ■ *Να βάλετε σε αύξουσα τάξη τα κλάσματα* $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}$ και $\frac{1+4}{3+5}$ *Να κάνετε και άλλα τέτοια παραδείγματα και θα διαπιστώσετε ότι αν* $\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\gamma}{\delta}$, *τότε* $\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}<\frac{\gamma}{\delta}$ Είναι επίσης χρήσιμο οι μαθητές να « βλέπουν» τις ισότητες $\frac{\alpha}{\gamma}\pm\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha\pm\beta}{\gamma}$ όχι μόνο από αριστερά προς τα δεξιά , αλλά και αντιστρόφως, δηλ. $\frac{\alpha\pm\beta}{\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}\pm\frac{\beta}{\gamma}$
Πολλαπλασιασμός κλασμάτων Διαίρεση κλασμάτων	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: • **Να πολλαπλασιάζουν κλάσματα και να λύνουν σχετικά προβλήματα** • **Να βρίσκουν τον αντίστροφο ενός αριθμού**	Ο πολλαπλασιασμός κλασμάτων πρέπει να παρουσιαστεί με ένα πρόβλημα της μορφής : Τα $\frac{5}{7}$ των πλακών ενός πεζόδρομου είναι χρωματιστές. Από τις πλάκες αυτές τα $\frac{2}{3}$ είναι κόκκινες. Ποιο μέρος του πεζόδρομου καταλαμβάνουν οι πλάκες αυτές;  Αφού επισημανθεί ότι αντίστροφο έχουν οι αριθμοί α με α≠0, να λυθούν με τη βοήθεια του αντιστρόφου εξισώσεις της μορφής: $\frac{3}{5}x=1$, $6x=1$

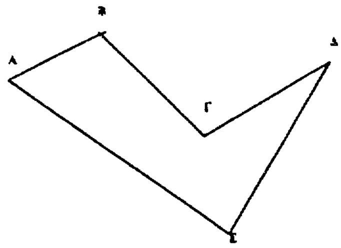
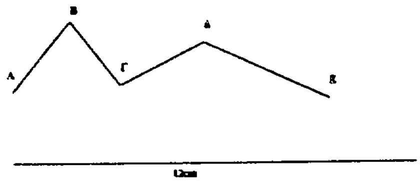
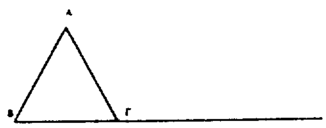
		Να τονιστεί ο σωστός τρόπος πολλαπλασιασμού αριθμού με κλάσμα, διότι παρατηρούνται πολλά λάθη στους μαθητές οι οποίοι συνηθίζουν να πολλαπλασιάζουν και τους δυο όρους του κλάσματος με τον αριθμό.
	Να διαιρούν κλάσματα και να λύνουν σχετικά προβλήματα	Η διαίρεση κλασμάτων θα παρουσιαστεί ως αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού, δηλαδή αν $\frac{3}{4} \div \frac{6}{7} = x$, τοτε $\frac{3}{4} = \frac{6}{7} \cdot x$ και από την τελευταία εξίσωση έχουμε $x = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{6}$ Το σύνθετο κλάσμα να θεωρηθεί ως πηλίκο δυο κλασμάτων. Επομένως ο υπολογισμός του ανάγεται στην εύρεση του πηλίκου δυο κλασμάτων.

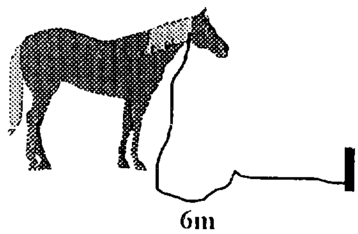
3. ΕΥΘΕΙΑ - ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ - ΚΥΚΛΟΣ		Στη διδασκαλία της Γεωμετρίας στο Γυμνάσιο θα γίνεται χρήση γεωμετρικών οργάνων και εποπτικού υλικού, όπως το διαφανές και το τετραγωνισμένο χαρτί.
Σημείο- Γραμμή Ευθύγραμμο τμήμα Ευθεία-Ημιευθεία	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν : • Να σχεδιάζουν και να συμβολίζουν σημεία, ευθύγραμμα τμήματα, ευθείες, ημιευθείες.	Η παρουσίαση των εννοιών αυτών να γίνεται με τη βοήθεια των γεωμετρικών στερεών (που προκύπτουν με «αφαίρεση» από υλικά σώματα).
	• Να γνωρίζουν ότι από ένα σημείο διέρχονται άπειρες ευθείες και ότι από δύο σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία.	Η παράγραφος προσφέρεται και για ερευνητικές δραστηριότητες της μορφής: ■ Πόσες ευθείες περνούν από 4 σημεία; (Να διακρίνετε περιπτώσεις)
	• Να διακρίνουν τη διαφορά ανάμεσα σε ευθύγραμμο τμήμα και σε ευθεία που διέρχεται από δύο σημεία.	
Επίπεδο Θέσεις ευθειών στο επίπεδο	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν : • Να σχεδιάζουν και να συμβολίζουν επίπεδα.	Να τονιστεί ότι το επίπεδο "δεν είναι" παραλληλόγραμμο, όπως συνηθίζεται να σχεδιάζεται. Το επίπεδο επεκτείνεται απεριόριστα.
	• Να αναγνωρίζουν πότε δύο ευθείες είναι παράλληλες και πότε τέμνονται.	Παράδειγμα τεμνόμενων ευθειών: 
Ευθείες κάθετες	Οι μαθητές πρέπει: • Να αναγνωρίζουν πότε δύο ευθείες τέμνονται κάθετα.	Οι κάθετες να δίνονται και με προσανατολισμό διαφορετικό από τον συνηθισμένο π.χ. 

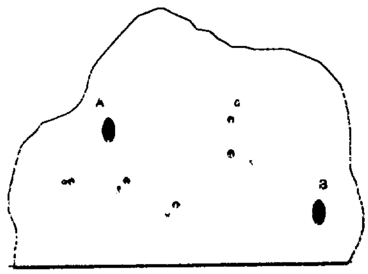
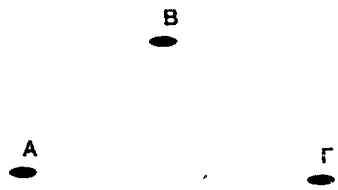
	• Να σχεδιάζουν κάθετη από σημείο σε ευθεία, είτε το σημείο βρίσκεται πάνω στην ευθεία, είτε έξω από αυτήν.	Να ασκηθούν οι μαθητές στη χάραξη καθέτων από ή σε σημείο μιας ευθείας με ασκήσεις της μορφής: Να σχεδιάσετε τις κάθετες στην ευθεία ε από τα σημεία Α, Β, Γ και Δ 
	• Να σχεδιάζουν παράλληλες ευθείες με τη βοήθεια του κανόνα και του γνώμονα.	
Απόσταση σημείων	• Οι μαθητές πρέπει να βρίσκουν την απόσταση σημείων με το υποδεκάμετρο	Να μπορούν, όταν δίνεται ένα σημείο να βρίσκουν άλλα σημεία που να απέχουν ορισμένη απόσταση. Π.χ. Να βρεθούν 10 σημεία που να απέχουν 3 cm από το σημείο Α.
Απόσταση σημείου από ευθεία	Οι μαθητές πρέπει: • Να κατανοήσουν τι σημαίνει απόσταση σημείου από ευθεία.	■ Να γίνει αναφορά στα ύψη τριγώνου και άσκηση των μαθητών στη χάραξή τους με τα γεωμετρικά όργανα. Να γίνει εφαρμογή οπωσδήποτε σε ορθογώνια και αμβλυγώνια τρίγωνα.
	• Να γνωρίζουν ότι από ένα σημείο φέρεται μόνο μία κάθετη στην ευθεία και να τη χαράζουν.	
	• Να γνωρίζουν την ιδιότητα της απόστασης.	■ Να γίνει νύξη στο ότι η υποτείνουσα είναι μεγαλύτερη από τις κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου.
Απόσταση παραλλήλων	• Οι μαθητές πρέπει να κατανοούν τι σημαίνει απόσταση δύο παραλλήλων	■ Οι μαθητές να ασκηθούν στη σχεδίαση καθέτων ευθύγραμμων τμημάτων μεταξύ παραλλήλων και στη σχεδίαση παραλλήλων με δεδομένη απόσταση.

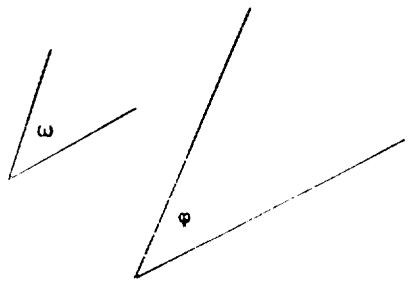
		■ **Επίσης να ασκηθούν στη σχεδίαση όλων των υψών παραλληλογράμμου και ρόμβου** Για παράδειγμα:  • **Εδώ μπορεί να γίνει νύξη στην αποδεικτική διαδικασία στην πρόταση "Δύο ευθείες κάθετες σε μια ευθεία είναι παράλληλες" με απαγωγή σε άτοπο (χωρίς φυσικά χρήση του όρου) και επισήμανση παρόμοιου συλλογισμού στην καθημερινή ζωή.**
Ευθύγραμμα σχήματα	**Οι μαθητές πρέπει :** • **Να αναγνωρίζουν, να ονομάζουν και να σχεδιάζουν κυρτά ευθύγραμμα σχήματα.** • **Να γνωρίζουν τους ορισμούς των βασικών ευθύγραμμων σχημάτων**	**Για να εξοικειωθούν οι μαθητές με τα ευθύγραμμα σχήματα πρέπει να τους δοθούν κατάλληλες δραστηριότητες, όπως:** ■ Τι σχήματα μπορείτε να φτιάξετε με τον συνδυασμό 2 ορθογωνίων και ισοσκελών τριγώνων;  ■ Πόσα ορθογώνια υπάρχουν στο παρακάτω σχήμα:  ■ Να περιγράψεις στο τηλέφωνο σε ένα φίλο σου που έλειπε από το μάθημα το σχήμα που σχεδίασε στον πίνακα ο καθηγητής (να δοθεί συγκεκριμένο σχήμα).

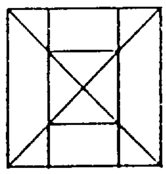
	• **Να ομαδοποιούν ευθύγραμμα σχήματα σύμφωνα με κάποιο κριτήριο**	Για παράδειγμα : Φτιάξε ομάδες με τα παρακάτω σχήματα: 
	• **Να χρησιμοποιούν για την ομαδοποίηση σχεδιαγράμματα .**	Για παράδειγμα , της μορφής: 
	• **Να απαντούν σε ερωτήματα που αφορούν τη σχέση μεταξύ των σχημάτων**	*Για παράδειγμα:* ■ *Ένα τετράγωνο είναι ρόμβος; Ένας ρόμβος είναι τετράγωνο;* ■ *Έχω 2 γωνίες ορθές και 4 πλευρές. Τι είμαι.*
	• **Να αναγνωρίζουν, να ονομάζουν και να χαράζουν τα στοιχεία των ευθυγράμμων σχημάτων (γωνίες, διαγώνιες, κορυφές, κλπ)**	
Ίσα σχήματα	• **Οι μαθητές πρέπει να κατανοούν την έννοια της ισότητας των ευθυγράμμων σχημάτων**	**Η έννοια της ισότητας δίνεται με την σύμπτωση του ενός σχήματος στο άλλο και συνάγεται το συμπέρασμα ότι τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα.** **Η σύμπτωση επιτυγχάνεται με τη βοήθεια διαφανούς χαρτιού.**
Μήκος ευθύγραμμου τμήματος	**Οι μαθητές πρέπει να μπορούν:**	
	• **Να βρίσκουν το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος**	**Προτείνεται η άσκηση των μαθητών στην εκτίμηση μηκών, και στη συνέχεια με πραγματικές μετρήσεις, όπου είναι δυνατόν, να γίνεται επαλήθευση της μέτρησης.**
	• **Να γνωρίζουν τις μονάδες μέτρησης μήκους στο δεκαδικό μετρικό σύστημα, τον συμβολισμό τους και τις μεταξύ τους σχέσεις.**	**Τονίζεται η σχετικότητα επιλογής μονάδων και τα πλεονεκτήματα του δεκαδικού μετρικού συστήματος.**

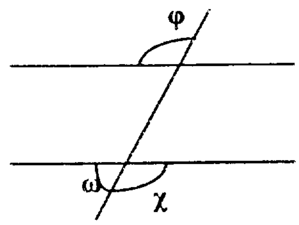
Σύγκριση ευθύγραμμων τμημάτων	**Οι μαθητές πρέπει να μπορούν:** • **Να συγκρίνουν ευθύγραμμα τμήματα συγκρίνοντας τα μήκη τους, με το υποδεκάμετρο ή με το διαβήτη.**	Οι μαθητές να διαπιστώσουν μέσα από παραδείγματα ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι η γραμμή με το μικρότερο μήκος, που συνδέει τα σημεία Α και Β.
Πρόσθεση και αφαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων	**Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να προσθέτουν και να αφαιρούν ευθύγραμμα τμήματα**	Για την άσκηση των μαθητών να χρησιμοποιηθούν δραστηριότητες όπως: ■ Ποιος είναι ο συντομότερος δρόμος για να πάει κανείς από το Α στο Δ; Ο ΑΒΓΔ ή ο ΑΕΔ:  ■ Η γραμμή ΑΒΓΔΕ είναι μεγαλύτερη από 12cm;  ■ Στην ημιευθεία με αρχή Β βρείτε σημείο Ε έτσι ώστε το μήκος ΒΕ να ισούται με την περίμετρο του τριγώνου. 

Μέσο ευθύγραμμου τμήματος	• **Να βρίσκουν το μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος (με υποδεκάμετρο ή με διαβήτη)**	Να γίνει αναφορά στις διάμεσους τριγώνου
Κύκλος -Κυκλικός δίσκος	• **Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν την έννοια του κύκλου, να αναγνωρίζουν τα στοιχεία του και να μπορούν να τον σχεδιάζουν.**	**Για την κατανόηση της έννοιας του κύκλου και την εξάσκηση στο σχεδιασμό του, να δοθούν δραστηριότητες της μορφής:** ■ Να σχεδιαστεί ένα τρίγωνο με δεδομένες τις πλευρές του ■ Να κατασκευαστεί το κινέζικο σύμβολο Yin-Yan 
	• **Να διακρίνουν τον κύκλο από τον κυκλικό δίσκο**	**Να δοθούν δραστηριότητες της μορφής:** ■ Δίνεται ένας χάρτης με σημειωμένες σ'αυτόν διάφορες πόλεις. Η πόλη Α έχει μια επέτειο στην οποία είναι προσκεκλημένες όσες πόλεις βρίσκονται σε απόσταση μικρότερη των 20 km Ποιες πόλεις θα παρευρεθούν στην επέτειο; ■ Να γραμμοσκιάσετε την περιοχή μέσα στην οποία βόσκει το άλογο. 
Θέσεις ευθείας και κύκλου	**Οι μαθητές πρέπει να μπορούν:** • **Να διακρίνουν αν μια ευθεία είναι τέμνουσα ή εφαπτομένη του κύκλου.** • **Να σχεδιάζουν την εφαπτομένη ενός κύκλου σε ένα σημείο του.**	**Η διάκριση γίνεται με σύγκριση της απόστασης του κέντρου του κύκλου από την ευθεία και της ακτίνα του.** **Ως εφαρμογή ζητείται να σχεδιάσουν κύκλο (ή κύκλους) εφαπτόμενο σε ευθεία σε δοθέν σημείο της.** **Να προταθούν κατασκευές διατυπωμένες με μορφή διαδοχικών βημάτων.** Για παράδειγμα: 1. Κατασκεύασε κύκλο κέντρου Ο και πάρε σημείο Α εκτός του κύκλου. 2. Χάραξε την ΟΑ. 3. Χάραξε κύκλο κέντρου Α και ακτίνας ΑΟ. 4. Ονόμασε Β το σημείο που η ΟΑ ξανατέμνει τον τελευταίο κύκλο και Γ, Δ τα σημεία τομής των δύο κύκλων. 5. Φέρε τις ευθείες ΒΓ, ΒΔ. Τι παρατηρείς;

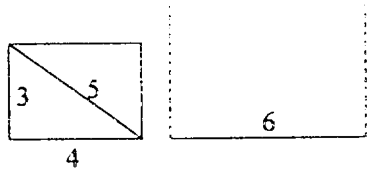
Μεσοκάθετη ευθύγραμμου τμήματος	Οι μαθητές πρέπει: • Να γνωρίζουν τι είναι η μεσοκάθετη ενός ευθύγραμμου τμήματος και να τη σχεδιάζουν	Ο σχεδιασμός της μεσοκάθετης να γίνει με δυο τρόπους : ■ με υποδεκάμετρο και γνώμονα ■ με κανόνα και διαβήτη Να τονιστεί ότι με τη γεωμετρική κατασκευή βρίσκουμε και το μέσο του τμήματος
	• Να γνωρίζουν τη χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της μεσοκάθετης (ευθύ και αντίστροφο)	Οι μαθητές να ανακαλύψουν την ιδιότητα της μεσοκάθετης με παραδείγματα.
	• Να χρησιμοποιούν την ιδιότητα της μεσοκάθετης στις γεωμετρικές κατασκευές	Να χρησιμοποιηθεί η ιδιότητα της μεσοκάθετης στην κατασκευή ισοσκελούς τριγώνου, ισοπλεύρου τριγώνου, περικέντρου κτλ. Να δοθούν στους μαθητές ενδιαφέρουσες δραστηριότητες που αναδεικνύουν την ιδιότητα της μεσοκαθέτου, όπως π.χ. ■ Το παρακάτω σχήμα παριστάνει μια πλάζ, στην οποία υπάρχουν δύο καντίνες με παγωτά. Υποθέτουμε ότι κάθε λουόμενος που θέλει να αγοράσει παγωτό πηγαίνει στην πλησιέστερη καντίνα. Τα Α, Β είναι οι καντίνες ενω τα α,β,γ,δ,ε οι λουόμενοι. Α) Να βρείτε σε ποιά καντίνα θα πάει ο καθένας. Β) Να βρείτε την περιοχή που ανήκει κάθε καντίνα.  ■ Ο Ηλίας, ο Γιώργος και η Μάρθα μένουν στα σπίτια Α, Β, Γ αντιστοίχως και το σχολείο τους απέχει την ίδια απόσταση από τα τρία σπίτια. Μπορείτε να βρείτε τη θέση του σχολείου; 

Η έννοια της γωνίας Στοιχεία της γωνίας	Οι μαθητές πρέπει: • Να κατανοούν την έννοια της γωνίας • Να σχεδιάζουν, να συμβολίζουν και να διαβάζουν γωνίες • Να συγκρίνουν γωνίες	**Η έννοια της γωνίας να παρουσιαστεί μέσα από πραγματικές καταστάσεις ,πχ. δείκτες του ρολογιού, φωτεινή δέσμη κτλ.** **Η σύγκριση γίνεται με τη βοήθεια διαφανους χαρτιού. Έτσι είναι ευκολότερο να γίνει αντιληπτό ότι το μέτρο μιας γωνίας εξαρτάται από το άνοιγμα των πλευρών της και μόνο. Να ληφθεί υπόψη ότι πολλοί μαθητές συγχέουν το άνοιγμα μιας γωνίας με το μήκος των σχεδιασμένων πλευρών της.**  **(Ενώ ω=φ, πολλοί μαθητές πιστεύουν ότι φ>ω)** **Να δοθούν ενδιαφέρουσες δραστηριότητες της μορφης** ■ Να σχεδιαστει η κινηση μιας μπάλας μπιλιαρδου μέχρι και 4 ανακλάσεις.
Είδη γωνιών	**Οι μαθητές πρέπει:** • **Να γνωρίζουν και να σχεδιάζουν διάφορα είδη γωνιών (οξεία, ορθή, αμβλεία)** • **Να διαπιστώνουν με τη βοήθεια του γνώμονα αν μια γωνία είναι οξεία, ορθή ή αμβλεία.**	**Η εποπτική παρουσίαση των ειδών των γωνιών μπορεί να γίνει με τους δείκτες του ρολογιού.** **Να αναφερθούν τα είδη των τριγώνων ως προς τις γωνίες**

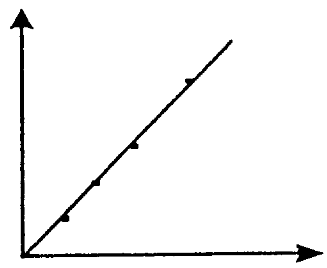
Μέτρηση γωνιών	**Οι μαθητές πρέπει :** • **Να κατανοούν τη διαδικασία μέτρησης μιας γωνίας** • **Να γνωρίζουν τη βασική μονάδα μέτρησης γωνιών (και τις υποδιαιρέσεις της)** • **Να σχεδιάζουν γωνίες όταν γνωρίζουν το μέτρο τους.**	**Η μέτρηση γίνεται με το μοιρογνωμόνιο.** **Ως εφαρμογή να σχεδιαστεί τρίγωνο όταν δίνονται:** **1. δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία** **2. μια πλευρά και οι προσκείμενες σ'αυτήν γωνίες** **Επίσης ως εφαρμογή να σχεδιαστούν κυκλικά διαγράμματα, που να περιγράφουν συγκεκριμένες κατανομές συχνοτήτων**
Εφεξής και διαδοχικές γωνίες	**Οι μαθητές πρέπει:** • **Να αναγνωρίζουν και να κατασκευάζουν εφεξής γωνίες**	Για την εξάσκηση των μαθητών να δοθούν ασκησεις της μορφής: ■ Να βρείτε στο παρακάτω σχήμα όλες τις εφεξής γωνίες: 
Άθροισμα γωνιών	• **Να βρίσκουν το άθροισμα δύο εφεξής γωνιών**	**Οι μαθητές να διαπιστώνουν με το μοιρογνωμόνιο ότι το άθροισμα δύο γωνιών είναι η γωνία με μέτρο το άθροισμα των μέτρων τους** **Επίσης με το μοιρογνωμόνιο να διαπιστωνουν ότι όταν οι μη κοινές πλευρές δυο εφεξής γωνιών είναι αντικείμενες ημιευθείες οι γωνίες έχουν άθροισμα 180°.**
Παραπληρωματικές-Συμπληρωματικές γωνίες	**Οι μαθητές πρέπει:** • **Να γνωρίζουν πότε δύο γωνίες είναι παραπληρωματικές ή συμπληρωματικές** • **Να υπολογίζουν και να σχεδιάζουν την παραπληρωματική ή τη συμπληρωματική δοθείσης γωνίας**	**Ο υπολογισμός της συμπληρωματικής ή της παραπληρωματικής γωνίας προσφέρεται για την άσκηση των μαθητών στην επίλυση εξισώσεων της μορφής $x+a=\beta$ και $ax=\beta$.**

Κατακορυφήν γωνίες	Οι μαθητές πρέπει: • Να γνωρίζουν πότε δύο γωνίες λέγονται κατακορυφήν • Να αναγνωρίζουν δύο κατακορυφήν γωνίες και να συμπεραίνουν ότι είναι ίσες	Η διαπίστωση ότι δύο κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες αρχικά γίνεται εποπτικά (διαφανές χαρτί) και στη συνέχεια με αποδεικτική διαδικασία.
Διχοτόμος γωνίας	• Να γνωρίζουν τι είναι η διχοτόμος μιας γωνίας και να τη σχεδιάζουν	Η σχεδίαση της διχοτόμου μπορεί να γίνει ή με το μοιρογνωμόνιο ή με δίπλωση του φύλλου σχεδίασης
Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από ευθεία	Οι μαθητές πρέπει: • Να γνωρίζουν πως ονομάζονται τα ζεύγη των γωνιών που σχηματίζονται από την τομή δύο παραλλήλων με μία τέμνουσά τους. • Να διαπιστώνουν ότι όλες οι οξείες (ή όλες οι αμβλείες) γωνίες, που σχηματίζουν δύο παράλληλες, που τέμνονται από τρίτη ευθεία είναι μεταξύ τους ίσες. • Να διαπιστώνουν ότι μια οξεία και μια αμβλεία γωνία από τις γωνίες που σχηματίζονται από την τομή δύο παραλλήλων από τρίτη ευθεία είναι παραπληρωματικές.	Η διαπίστωση να γίνει με διαφανές χαρτί ή με μέτρηση και σε απλές περιπτώσεις με αποδεικτική διαδικασία, όπως π.χ. για τις γωνίες ω και φ του παρακάτω σχήματος: 
Άθροισμα γωνιών τριγώνου	• Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180^0	Οι μαθητές εργάζονται σε συγκεκριμένα τρίγωνα προκειμένου να αναπτύξουν μια εικασία για το άθροισμα των γωνιών τριγώνου, την οποία στη συνέχεια αποδεικνύουν. Να γίνει αναφορά στην εξωτερική γωνία τριγώνου και στη σχέση της με τις γωνίες του τριγώνου.

4. ΠΟΣΑ ΑΝΑΛΟΓΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ		
Παράσταση σημείων στο επίπεδο.	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: • Να σχεδιάζουν ένα σύστημα ημιαξόνων. • Να βρίσκουν τις συντεταγμένες ενός σημείου. • Να βρίσκουν ένα σημείο όταν δίνονται οι συντεταγμένες του.	Να ασκηθούν οι μαθητές στο σχεδιασμό χρησιμοποιώντας τα γεωμετρικά τους όργανα. Να δοθεί έμφαση στην εξοικείωση τους με την αντίστοιχη ορολογία και στο ότι σε ορισμένες περιπτώσεις επιβάλλεται διαφοροποίηση της μονάδας στους δύο ημιάξονες. Να ασκηθούν οι μαθητές στο να διαβάζουν και να αντλούν πληροφορίες από διάφορα διαγράμματα, (καμπύλη ανάπτυξης βρεφών, καμπύλες θερμοκρασίας κτλ.) Να κατασκευάζουν διαγράμματα, (π.χ. επίπεδα γεωμετρικά σχήματα), με βάση τις συντεταγμένες χαρακτηριστικών τους σημείων.
Λόγος δύο αριθμών Αναλογία	Οι μαθητές πρέπει: • Να κατανοήσουν την έννοια του λόγου.	Να χρησιμοποιηθούν δραστηριότητες σύγκρισης μηκών πραγματικών αντικειμένων Να χρησιμοποιηθούν διάφορα είδη σχέσεων από την καθημερινή ζωή, (π.χ. η σύνθεση μίας μπλούζας είναι 70 % βαμβάκι, 30 % πολυεστέρας. Να εκφρασθεί η σύνθεση με τη βοήθεια λόγου). Να χρησιμοποιηθούν δραστηριότητες μεγένθυσης γεωμετρικών σχημάτων, (π.χ. σε ένα πρώτο επίπεδο μπορούν να χρησιμοποιηθούν ορθογώνια παραλληλόγραμμα διαφόρων μεγεθών ζωγραφισμένα σε τετραγωνισμένο χαρτί και να αναζητηθεί ο λόγος των μηκών των πλευρών τους).

		Η έννοια των όμοιων σχημάτων να εμφανισθεί με μία μη τυπική διατύπωση. Οι λόγοι των μηκών να παραλληλισθούν με τους λόγους των περιμέτρων και των εμβαδών των σχημάτων, (π.χ. Ο λόγος των μηκων των πλευρών δύο τετραγώνων είναι 1.5 Ποιος είναι ο λόγος των εμβαδών;) Να χρησιμοποιηθούν επίσης πραγματικές καταστάσεις μεγέθυνσης και σμίκρυνσης,(π.χ. χάρτες, μηχάνημα προβολής διαφανειών, κουκλόσπιτο, ιστορίες του Γκιούλιβερ κλπ.), για να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια της κλίμακας. Να επεξεργαστούν οι μαθητές δραστηριότητες όπου το προσθετικό μοντέλο οδηγεί σε λανθασμένα συμπεράσματα, π.χ. ■ να σχεδιάσετε μεγενθυμένο το παρακάτω σχήμα  (Η μεγέθυνση του 4 σε 6 οδηγεί σε αδυναμία σχεδιασμού όμοιου σχήματος)
	• Να κατανοήσουν την έννοια της αναλογίας	Να αντιληφθούν κατ'αρχήν την έννοια της αναλογίας καθαρών αριθμών ως ισότητα δυο λόγων. Να γνωρίζουν και να εφαρμόζουν την χιαστή ιδιότητα. Να επιλύουν εξισώσεις της μορφής αχ=β μέσω αναζήτησης του τέταρτου αναλόγου $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{\chi}$
Ανάλογα ποσά Ιδιότητες	Οι μαθητές πρέπει: • Να αναγνωρίζουν αν υπάρχει αναλογία στη μεταβολή δύο μεγεθών • Να συμπληρώνουν πίνακες ανάλογων ποσών όταν δίνεται ο συντελεστής αναλογίας	Για να κατανοηθεί καλύτερα η έννοια των ανάλογων μεγεθών να αναφερθούν και παραδείγματα μη αναλόγων μεγεθών π.χ. Ανάστημα - Βάρος ενός ατόμου, Πλευρά - Εμβαδόν τετραγώνου...κλπ. Να επεξεργασθούν οι μαθητές δραστηριότητες όπου το προσθετικό μοντέλο οδηγεί σε λανθασμένα συμπεράσματα.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>• Όταν δίνονται οι πίνακες ανάλογων ποσών να υπολογίζουν το συντελεστή αναλογίας</td>
<td>Να δοθούν ως αντιπαραδείγματα πίνακες κατασκευασμένοι με βάση τον προσθετικό συντελεστή π.χ.
<table>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>6</td></tr>
<tr><td>4</td><td>5</td><td>8</td></tr>
</table>
(+ 2)

Ο συντελεστής αναλογίας να μην είναι μόνο ακέραιος, αλλά, <u>κυρίως</u> τυχαίος κλασματικός π.χ.
<table>
<tr><td>5</td><td>1,5</td><td>4</td></tr>
<tr><td>17</td><td>5,1</td><td>6,8</td></tr>
</table>
$\left(x\frac{17}{5}\right)$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>• Να κατανοήσουν την έννοια του ποσοστού ως ειδική περίπτωση συντελεστή αναλογίας</td>
<td>Για την εύρεση των ποσοστών μπορούν να χρησιμοποιηθούν πίνακες αναλογίας:
<table>
<tr><td>100</td><td>K</td></tr>
<tr><td>α</td><td>χ</td></tr>
</table>
$(x\alpha\%)$</td>
</tr>
<tr>
<td>Γραφική αναπαράσταση σχέσης αναλογίας</td>
<td>Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: Να αναπαριστούν γραφικά μια σχέση αναλογίας και να οδηγηθούν στη διαπίστωση ότι τα σημεία με συντεταγμένες τα ζεύγη των αντίστοιχων τιμών δύο αναλόγων ποσών βρίσκονται σε μία ημιευθεία με αρχή την αρχή των αξόνων.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Προβλήματα αναλογιών

Οι μαθητές πρέπει :

- Να οργανώνουν τα δεδομένα ενός προβλήματος αναλογικά σε πίνακα και με βάση τον πίνακα να κατασκευάζουν όπου κρίνεται απαραίτητο και τη γραφική παράσταση.
- Να λύνουν τα προβλήματα εφαρμόζοντας, όπου κρίνεται απαραίτητο τις ιδιότητες των αναλόγων ποσών σε δύο πλαίσια : αριθμητικό και γραφικό.

Η λύση του προβλήματος να διατυπώνεται σε δυο τουλάχιστον πλαίσια:
αριθμητικό (με βάση τον πίνακα) και γραφικό(ανάγνωση της γραφικής παράστασης). Να αναλύονται όλοι οι τρόποι λύσης στο αριθμητικό πλαίσιο.

- **Στα προβλήματα ο συντελεστής αναλογίας να μην είναι μόνο ένα από τα συνήθη μεγέθη π. χ. τιμή /κιλό, τιμή /μέτρο, ταχύτητα /μονάδα χρόνου, αλλά οι μαθητές να εξοικειωθούν και με μεγέθη περιφραστικά.**

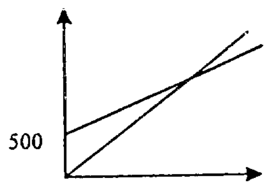
Για παράδειγμα:

- *«καθαρίζω 3 κιλά κεράσια και παίρνω 2 κιλά καθαρά κεράσια (χωρίς κουκούτσια). Αν καθαρίσω 5 κιλά κεράσια τι ποσότητα καθαρών κερασιών θα πάρω;»*

3 κιλά	2 κιλά
5 κιλά	x

- *Δυο όμιλοι μπάσκετ προτείνουν τις εξής τιμές Α΄ όμιλος :Εγγραφή 500 δρχ και 100 δρχ ανά παιχνίδι.*
  Β΄ όμιλος: 200 δρχ ανά παιχνίδι.

Σε ποιο όμιλο συμφέρει να εγγραφεί κάποιος;



Στα προβλήματα να περιλαμβάνονται και δεκαδικοί αριθμοί μικρότεροι της μονάδας.

Για παράδειγμα:

Τα 240 gr ζαμπόν κοστίζουν 600 δρχ. Ποια είναι η τιμή του κιλού;

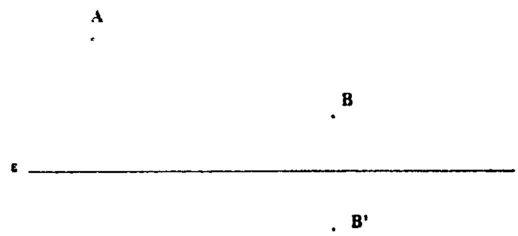
0,240	1
600	x

Αντιστρόφως ανάλογα ποσά	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: • Να διακρίνουν αν δύο ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα • Να κατασκευάζουν πίνακες αντίστοιχων τιμών αντιστρόφως ανάλογων ποσών • Να διαπιστώνουν με τη βοήθεια ενός συστήματος ημιαξόνων, ότι τα σημεία με συντεταγμένες τα ζεύγη των αντίστοιχων τιμών δύο αντιστρόφως ανάλογων ποσών δεν βρίσκονται σε ευθεία • Να λύνουν προβλήματα εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των αντιστρόφως ανάλογων ποσών.	Για να κατανοήσουν την έννοια των αντιστρόφως αναλόγων ποσών, να δοθούν κατάλληλα παραδείγματα όπως: ■ Αριθμός ημερών και εργατών που απαιτούνται για την κατασκευή συγκεκριμένου έργου ■ Διαστάσεις ενός ορθογωνίου με σταθερό εμβαδό ■ Σχέση ταχύτητας-χρόνου Να σχεδιαστεί από μερικά σημεία της η καμπύλη δυο αντιστρόφως ανάλογων ποσών και να αναφερθεί το όνομα της «υπερβολή» Να τονιστεί ότι οι αντίστοιχες τιμές δύο αντιστρόφως αναλόγων ποσών είναι πάντα διάφορες του μηδενός. Η λύση προβλημάτων με ποσά αντιστρόφως ανάλογα θα γίνεται: ■ Με την εφαρμογή της ιδιότητας ότι το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών δύο αντιστρόφως αναλόγων ποσών είναι σταθερό Να ακολουθήσει επίλυση προβλημάτων αναλόγων και αντιστρόφως αναλόγων ποσών που αναφέρονται σε διάφορε περιοχές της ανθρώπινης δραστηριότητας όπως π.χ. ταξίδια, εργασία, τεχνική, ταχύτητες κτλ.

5. ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ		
Συμμετρία ως προς ευθεία. Άξονας συμμετρίας	Οι μαθητές πρέπει: • Να αναγνωρίζουν σχήματα με άξονα ή άξονες συμμετρίας.	Πρέπει να παρουσιασθούν πολλές φωτογραφίες και εικόνες με σχήματα που έχουν άξονα ή άξονες συμμετρίας πχ ζώα, φύλλα δέντρων , προσόψεις σπιτιών, αντικείμενα καθημερινής χρήσης, διακοσμητικά κ.α. Η διαπίστωση της συμμετρίας θα γίνεται και με δίπλωση κατά μήκος του άξονα ο οποίος άλλοτε να είναι χαραγμένος και άλλοτε όχι.
	• Να γνωρίζουν τα βασικά γεωμετρικά σχήματα με άξονες συμμετρίας (ισοσκελές και ισόπλευρο τρίγωνο, ισοσκελές τραπέζιο, ρόμβος τετράγωνο, ορθογώνιο, κύκλος)	Οι μαθητές να οδηγηθούν μέσα από κατάλληλες κατασκευές στην εξαγωγή των συμπερασμάτων. Όπως π.χ. Φτιάξτε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο ώστε ΑΒ=ΑΓ=5cm και ΒΓ=4cm και χαράξτε την διάμεσο ΑΜ. Διπλώστε κατά μήκος της ΑΜ. Τι παρατηρείτε: Να τονιστεί ότι οποιαδήποτε διάμετρος του κύκλου είναι και άξονας συμμετρίας του.
	• Να γνωρίζουν τις γεωμετρικές ιδιότητες που απορρέουν από τη συμμετρία αυτή.	
	• Να γνωρίζουν πότε δυο σημεία είναι συμμετρικά ως προς ευθεία. • Να γνωρίζουν πότε δυο σχήματα είναι συμμετρικά ως προς ευθεία και ότι τα συμμετρικά ως προς ευθεία σχήματα είναι ίσα.	Η κατασκευή του συμμετρικού ενός σημείου ως προς μια ευθεία να γίνει αρχικά με δίπλωση. Αφού διαπιστωθούν οι ιδιότητες, στη συνέχεια να ζητηθεί να σχεδιασθούν τα συμμετρικά διαφόρων σχημάτων σε τετραγωνισμένο χαρτί. Ύστερα από την κατανόηση των ιδιοτήτων της συμμετρίας να κατασκευαστούν συμμετρικά σχήματα ως προς άξονα και σε μη τετραγωνισμένο χαρτί.
	• Να κατασκευάζουν το συμμετρικό σημείου, ευθύγραμμου τμήματος, ευθείας ,τριγώνου, γωνίας, πολυγώνου και κύκλου ως προς μια ευθεία.	Να ασκηθούν οι μαθητές με πολλά παραδείγματα στις κατασκευές συμμετρικών σχημάτων Για το συμμετρικό ενός τριγώνου ως προς ευθεία να χρησιμοποιηθεί μια ευθεία που: -δεν τέμνει τις πλευρές του -ορίζεται από δυο κορυφές τού - τέμνει τις πλευρές του

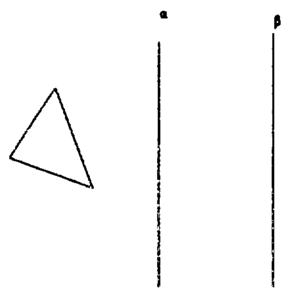
Για την κατανόηση της συμμετρίας και της χρησιμότητας της, αλλά και την εξάσκηση των μαθητών στη χρήση των γεωμετρικών οργάνων πρέπει να τους δοθούν κατάλληλες και ενδιαφέρουσες εφαρμογές, όπως π.χ.

- Να χαράξετε την πορεία του φωτός όταν ανακλάται σε επιφάνεια
- Στο παρακάτω σχήμα τα σημεία Β και Β΄ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία ε. Να βρείτε με τη βοήθεια μόνο του χάρακα το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ε.



- Ποιοι είναι οι άξονες συμμετρίας του σχήματος που δημιουργείται από δυο κύκλους με διαφορετικές ακτίνες όταν i) έχουν το ίδιο κέντρο ii) όταν έχουν διαφορετικά κέντρα;
- Ποιοι είναι οι άξονες συμμετρίας του σχήματος που δημιουργείται από δυο ίσους τεμνόμενους κύκλους;

- Να βρείτε το συμμετρικό του σχήματος ως προς την ευθεία α και το συμμετρικό του νέου σχήματος ως προς την ευθεία β. Τι σχέση έχουν το αρχικό και το τελευταίο σχήμα; Να επαναλάβετε το ίδιο και με μια τρίτη παράλληλη . Τι παρατηρείτε;



Συμμετρία ως προς σημείο. Κέντρο συμμετρίας	Οι μαθητές πρέπει: • Να αναγνωρίζουν σχήματα με κέντρο συμμετρίας. • Να γνωρίζουν τα βασικά γεωμετρικά σχήματα με κέντρο συμμετρίας και τις γεωμετρικές ιδιότητες που απορρέουν από τη συμμετρία αυτή. • Να γνωρίζουν πότε δυο σημεία είναι συμμετρικά ως προς σημείο. • Να γνωρίζουν πότε δυο σχήματα είναι συμμετρικά ως προς σημείο και ότι τα συμμετρικά ως προς σημείο σχήματα είναι ίσα. • Να κατασκευάζουν το συμμετρικό σημείου, ευθ. τμήματος, ευθείας, γωνίας, τριγώνου, πολυγώνου και κύκλου ως προς σημείο.	Να ασκηθούν οι μαθητές με πολλά παραδείγματα στις κατασκευές αυτές. Για την εύρεση του συμμετρικού ενός τριγώνου ως προς κέντρο συμμετρίας μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν κέντρο ένα σημείο που: -δεν ανήκει στο τρίγωνο -βρίσκεται εντός του τριγώνου -είναι μια κορυφή του Οι μαθητές να οδηγηθούν μέσα από κατάλληλες κατασκευές στην εξαγωγή των συμπερασμάτων για τις γεωμετρικές ιδιότητες που απορρέουν από τη συμμετρία ως προς κέντρο, όπως π.χ. ■ Σχεδιάστε ένα παραλ/μο ΑΒΓΔ και το κέντρο συμμετρίας του Ι. Βρείτε: το συμμετρικό των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ως προς το κέντρο συμμετρίας Ι. Τι παρατηρείτε;
Άξονες συμμετρίας Κέντρο συμμετρίας σχήματος.	• Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν ότι το συμμετρικό σχήματος με άξονα συμμετρίας ως προς τον άξονα αυτό, ή με κέντρο συμμετρίας ως προς το κέντρο αυτό είναι το ίδιο το σχήμα.	

6. ΟΙ ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ		
Θετικοί-Αρνητικοί αριθμοί.	Οι μαθητές πρέπει • Να κατανοήσουν την ανάγκη της εισαγωγής των αρνητικών αριθμών.	Η έννοια των θετικών και των αρνητικών αριθμών εισάγεται με τη βοήθεια μεγεθών που επιδέχονται αντίθεση π.χ θερμοκρασία, υψόμετρο, κέρδος -ζημιά κλπ.
	• Να εκφράζουν μεγέθη, ή μεταβολές μεγεθών με θετικούς ή αρνητικούς αριθμούς	Να παρασταθεί ένας ακέραιος με μεταβλητή. Να εξηγηθεί ότι μπορεί να παριστάνει αρνητικό ή θετικό αριθμό.
Ευθεία των ακεραίων αριθμών Τετμημένη σημείου	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: • Να τοποθετούν ακέραιους αριθμούς πάνω στον άξονα. • Να βρίσκουν τον ακέραιο που αντιστοιχεί σε καθορισμένο σημείο του άξονα.	
Καρτεσιανές συντεταγμένες	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: • Να βρίσκουν τις συντεταγμένες ενός σημείου. • Να βρίσκουν ένα σημείο όταν δίνονται οι συντεταγμένες του.	Να γίνει χρήση τετραγωνισμένου ή μιλιμετρέ χαρτιού. Να ασκηθούν οι μαθητές στο να βρίσκουν το συμμετρικό ενός σημείου ως προς τους άξονες και ως προς την αρχή των αξόνων. Για καλύτερη εξάσκηση μπορούν να δοθούν ασκήσεις της μορφής: *Σε τετραγωνισμένο χαρτί χαράζουμε τους άξονες. .Στο πρώτο τεταρτημόριο σχεδιάζουμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρείτε το συμμετρικό του ως προς τους δυο άξονες αλλά και ως προς την αρχή των αξόνων. .*
Απόλυτη τιμή ακέραιου αριθμού.	Οι μαθητές πρέπει: • Να κατανοούν την έννοια της απόλυτης τιμής ενός ακέραιου αριθμού.	Η έννοια της απόλυτης τιμής αριθμού θα συνδεθεί με την απόσταση του σημείου του άξονα στο οποίο αντιστοιχεί ο αριθμός, από την αρχή του άξονα.
	• Να γνωρίζουν ποιοι αριθμοί είναι αντίθετοι.	Είναι χρήσιμο να διαπιστώσουν οι μαθητές ότι δύο αντίθετοι αριθμοί παριστάνονται πάνω στον άξονα με δυο σημεία που ισαπέχουν από την αρχή, δηλαδή με συμμετρικά ως προς την αρχή σημεία.

		Η εύρεση αριθμών που έχουν ως απόλυτη τιμή δοθέντα αριθμό συμβάλλει στην κατανόηση της έννοιας των αντίθετων αριθμών.
Σύγκριση ακεραίων	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: • Να συγκρίνουν δυο ακέραιους αριθμούς. • Να διατάσσουν δυο ή περισσότερους ακέραιους από τον μικρότερο στο μεγαλύτερο και αντιστρόφως	Η διάταξη των ακεραίων να ορισθεί με τη βοήθεια του άξονα. Να τονισθεί ιδιαιτέρως η μεταβατική ιδιότητα των ανισοτήτων και η χρησιμότητα της στην σύγκριση αριθμών.
Πρόσθεση ακεραίων	• Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να προσθέτουν δυο ακεραίους	Η τεχνική της πρόσθεσης δύο ακέραιων να εξηγηθεί με κατάλληλα παραδείγματα μεγεθών που παρουσιάζουν αντίθεση. Για παράδειγμα: *Χθες το πρωί, η θερμοκρασία ήταν -3°.* *Στη διάρκεια της μέρας αυξήθηκε κατά 11°.* *Με τη βοήθεια ενός σχεδίου να υπολογίσετε πόσο ήταν η θερμοκρασία το απόγευμα;*
Αφαίρεση ακεραίων	• Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να αφαιρούν δυο ακεραίους	Η αφαίρεση δυο ακεραίων αριθμών θα ορισθεί με τη βοήθεια της πρόσθεσης. Δηλαδή, αν α-χ=β, τότε α=β+χ και άρα χ=α+(-β) Επομένως η αφαίρεση δυο ακεραίων είναι **πάντοτε δυνατή.** Η ιδιότητα αυτή της αφαίρεσης να εξηγηθεί με κατάλληλα προβλήματα που θα αναφέρονται σε μεγέθη που επιδέχονται αντίθεση. Όπως π.χ. *Το ασανσέρ ανέφερε κάποιον απο το δεύτερο υπόγειο στον έβδομο όροφο. Με τη βοήθεια ενός σχεδίου μπορείτε να υπολογίσετε πόσους ορόφους ανέβηκε το ασανσέρ;* Να τονισθεί ότι ο αντίθετος ενός αριθμού α συμβολίζεται με -α και ότι α+(-α)=0. Με κατάλληλα αριθμητικά παραδείγματα να εξηγηθεί πότε είναι -α>0 και πότε -α<0. Επειδή οι μαθητές εργάζονται σε ένα νέο σύνολο αριθμών ,είναι χρήσιμο να αναφερθούν οι ιδιότητες της πρόσθεσης: α+β=β+α α+0=0+α=α α+(-α)=(-α)+α=0

Γ. Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά της Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Περιεχόμενα	Στόχοι	Οδηγίες
1. ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ		
Η έννοια του ρητού αριθμού	Οι μαθητές πρέπει • Να κατανοήσουν την ανάγκη εισαγωγής των ρητών αριθμών • Να εκφράζουν μεγέθη ή μεταβολές μεγεθών με ρητούς αριθμούς • Να γράφουν ένα ρητό από την κλασματική στη δεκαδική μορφή και αντιστρόφως • Να παριστάνουν ένα ρητό με σημείο ενός άξονα • Να γνωρίζουν την έννοια της απόλυτης τιμής ενός ρητού • Να γνωρίζουν ποιοι αριθμοί είναι αντίθετοι και ποια η σχετική τους θέση στον άξονα • Να συγκρίνουν δυο ρητούς	Με κατάλληλα παραδείγματα θα φανεί η ανάγκη επέκτασης των ακεραίων στους ρητούς. Η απόλυτη τιμή θα οριστεί ως η απόσταση του σημείου που παριστάνει τον αριθμό από την αρχή του άξονα και δεν θα γίνει αναφορά στις ιδιότητες της. Στην τάξη αυτή η απόλυτη τιμή χρησιμεύει για να διατυπωθούν οι κανόνες σύγκρισης δυο ρητών και εκτέλεσης των μεταξύ τους πράξεων.
Πρόσθεση και αφαίρεση ρητών αριθμών	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: • Να βρίσκουν το άθροισμα δυο ρητών αριθμών • Να βρίσκουν το άθροισμα πολλών ρητών αριθμών • Να απλουστεύουν τη γραφή ενός αθροίσματος δυο ή περισσότερων προσθετέων • Να βρίσκουν τη διαφορά δυο ρητών αριθμών • Να υπολογίζουν αριθμητικές παραστάσεις με προσθέσεις και αφαιρέσεις • Να κάνουν απαλοιφή παρενθέσεων	Θα γίνει επανάληψη και πιο συστηματική παρουσίαση των σχετικών κανόνων και τεχνικών των πράξεων. Θα γίνει αναφορά στις ιδιότητες της πρόσθεσης : • $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ • $(\alpha + \beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$ • $\alpha + (-\alpha) = 0$ • $\alpha + 0 = \alpha$ και στη σημασία τους στον υπολογισμό αθροισμάτων πολλών προσθετέων.

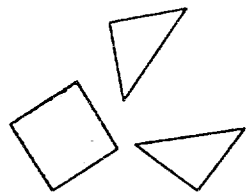
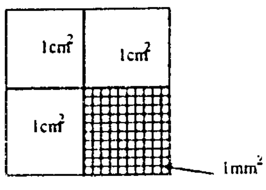
Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών	Οι μαθητές πρέπει: • Να μπορούν υπολογίζουν το γινόμενο δυο ρητών • Να γνωρίζουν ποιοι αριθμοί λέγονται αντίστροφοι και να βρίσκουν τον αντίστροφο ενός ρητού • Να γνωρίζουν και να εφαρμόζουν την επιμεριστική ιδιότητα • Να υπολογίζουν γινόμενα πολλών παραγόντων	Ο κανόνας του πολλαπλασιασμού ρητών αριθμών θα εξηγηθεί με κατάλληλα παραδείγματα και παραστατικά μοντέλα. Θα επισημανθεί ότι οι αντίστροφοι αριθμοί είναι ομόσημοι και ότι το 0 δεν έχει αντίστροφο. Η επιμεριστική ιδιότητα που συνδέει τον πολλαπλασιασμό με την πρόσθεση αποτελεί τη βάση του αλγεβρικού λογισμού και θα τονισθεί ιδιαίτερα. Θα γίνει αναφορά στις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού : • $\alpha\beta = \beta\alpha$ • $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ • $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1,\ \alpha \neq 0$ • $\alpha \cdot 1 = \alpha$ και στη σημασία τους στον υπολογισμό του γινομένου πολλών παραγόντων
Διαίρεση ρητών αριθμών Δεκαδική μορφή ρητών	Οι μαθητές πρέπει : • Να μπορούν να βρίσκουν το πηλίκο δυο ρητών • Να γνωρίζουν ότι το γινόμενο και το πηλίκο δυο ρητών είναι ομόσημοι αριθμοί • Να κατανοήσουν το πηλίκο δυο ρητών και ως λόγο • Να μπορούν να διακρίνουν τους ρητούς που δεν γράφονται ως δεκαδικοί ή περιοδικοί δεκαδικοί • Να μετατρέπουν ένα κλάσμα σε δεκαδικό ή περιοδικό δεκαδικό και αντιστρόφως	Η διαίρεση δυο ρητών θα παρουσιαστεί ως πολλαπλασιασμός με τον αντίστροφο, κατ' αναλογία προς τη διαίρεση δυο ακεραίων. Ο κανόνας υπολογισμού του πηλίκου δυο ρητών θα προκύψει μέσα από παραδείγματα της μορφής: Αν $15 : (-3) = \chi$, τότε $(-3)\chi = 15$. Επομένως $\chi<0$ και $\mid \chi \mid = 5$, άρα ... Θα επισημανθεί ότι διαίρεση με διαιρέτη το 0 δεν έχει νόημα, αφού το μηδέν δεν έχει αντίστροφο.
Δυνάμεις ρητών αριθμών	Οι μαθητές πρέπει: • Να γνωρίζουν την έννοια της δύναμης **α^ν, α ρητός** και **ν φυσικός** και να υπολογίζουν τέτοιες δυνάμεις • Να γνωρίζουν τις ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη **φυσικό** και να τις εφαρμόζουν στον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων . • Να γνωρίζουν την έννοια της δύναμης **$\alpha^{-\nu}$**, με τον ρητό **$\alpha \neq 0$** και **ν φυσικό** και να υπολογίζουν τέ-	Πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στο πρόσημο του εξαγομένου μιας δύναμης. Ο σχετικός κανόνας θα προκύψει μέσα από κατάλληλα αριθμητικά παραδείγματα. Να επισημανθεί η σχέση $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$ η οποία διευκολύνει σημαντικά τους υπολογισμούς. Αφού οι μαθητές διαπιστώσουν ότι

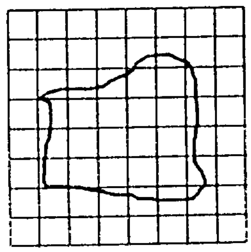
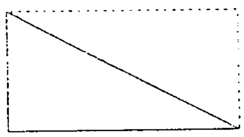
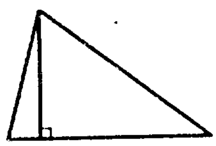
	τοιες δυνάμεις • Να γνωρίζουν τις ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη **ακέραιο** και να υπολογίζουν αριθμητικές παραστάσεις με δυνάμεις. • Να εφαρμόζουν την προβλεπόμενη προτεραιότητα των πράξεων • Να μπορούν να γράφουν αριθμούς σε τυποποιημένη μορφή ,να εκτελούν πράξεις με αυτούς και να τους συγκρίνουν	$10^{\nu}=1\underbrace{000...0}_{\nu\ \text{μηδενικα΄}}$ και $10^{-\nu}=\underbrace{0,00...0}_{\nu\ \text{μηδενικα΄}}1$ να ασκηθούν μέσα από πραγματικά κυρίως προβλήματα στην τυποποιημένη μορφή των αριθμών.

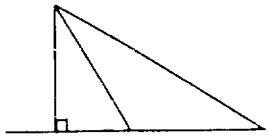
2. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ		
Η έννοια της μεταβλητής	Οι μαθητές πρέπει: • Να μπορούν να εκφράζουν με μεταβλητές διάφορες εκφράσεις της καθομιλούμενης γλώσσας • Να απαλείφουν παρενθέσεις και να κάνουν αναγωγή όμοιων όρων με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας.	Δεν είναι η πρώτη φορά που οι μαθητές έρχονται σε επαφή με την έννοια της μεταβλητής. Στο κεφάλαιο αυτό όμως κατεξοχήν θα αναδειχθεί ο ρόλος και η σημασία της στην επίλυση προβλημάτων. Για το λόγο αυτό πρεπει οι μαθητές να εξοικειωθούν στην παράσταση διάφορων μεγεθών με μεταβλητές. Πρέπει επίσης με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας να ασκηθούν στο λογισμό με μεταβλητές που θα τους επιτρέψει να μετασχηματίζουν με άνεση τις εξισώσεις μέχρι να βρεθεί η λύση τους Για παράδειγμα: • $\chi+\chi+2\chi+\psi+3 = (1+1+2)\chi+\psi+3 = 4\chi+\psi+3$ • $3\chi-2\psi+7\psi-8-5\chi+2 = 3\chi-5\chi-2\psi+7\psi-8+2 = -2\chi+5\psi-6$ • $\chi+(6+2\chi)= \chi+6+2\chi = \chi+2\chi+6 = 3\chi+6$ • $3\alpha+(\beta-2\alpha)= 3\alpha+\beta-2\alpha = 3\alpha-2\alpha+\beta = \alpha+\beta$ • $4\psi-(8+\psi)= 4\psi-8-\psi = 4\psi-\psi-8 = 3\psi-8$ • $6\beta-(3\gamma-4\beta)= 6\beta-3\gamma+4\beta = 6\beta+4\beta-3\gamma = 10\beta-3\gamma$ • $3(4x+6)= 3\cdot4x+3\cdot6 = 12x+18$ • $4(6-2x)= 4\cdot6-4\cdot2x = 24-8x$
Εξισώσεις	Οι μαθητές πρέπει: • Να κατανοήσουν την έννοια της εξίσωσης και να μάθουν τη σχετική ορολογία • Να μπορούν να επιλύουν εξισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο	Η επίλυση μιας εξίσωσης θα παρουσιαστεί με εποπτικό τρόπο και θα στηριχτεί στις ιδιότητες της ισότητας: αν $\alpha = \beta$, τότε $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ $\alpha - \gamma = \beta - \gamma$ $\alpha\cdot\gamma = \beta\cdot\gamma$ $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma},\ \gamma\neq0$ Με κατάλληλα παραστατικά μοντέλα να εξηγηθεί στους μαθητές ότι όλοι οι μετασχηματισμοί μιας εξίσωσης γίνονται ακολουθώντας τον κανόνα : **" και στα δυο μέλη της εξίσωσης κά-**

		νουμε πάντα το ίδιο" με σκοπό την "**απομόνωση**" του αγνώστου.
Επίλυση προβλημάτων	Οι μαθητές πρέπει: • Να κατανοούν το πρόβλημα (ποια τα δεδομένα , ποια τα ζητούμενα) • Να κάνουν εισαγωγή του αγνώστου • Να καταστρώνουν την εξίσωση • Να επιλύουν την εξίσωση • Να ελέγχουν τα αποτελέσματα • Να καταγράφουν την απάντηση	Η λύση προβλημάτων με εξισώσεις είναι από τους βασικότερους στόχους του κεφαλαίου αυτού αλλά και ολόκληρου του βιβλίου. Με τις εξισώσεις έχουμε μια μέθοδο επίλυσης δυναμικότερη και παραγωγικότερη από τις μεθόδους της πρακτικής αριθμητικής. Για να διαπιστωθεί αυτό θα δοθούν στους μαθητές επιλεγμένα προβλήματα τα οποία θα προσπαθήσουν να λύσουν με πρακτική αριθμητική αλλά και με εξίσωση.
Επίλυση τύπων	• Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να επιλύουν τύπους ως προς μια μεταβλητή	Θα επιλυθούν προβλήματα με αντικατάσταση στον αρχικό τύπο, αλλά και προβλήματα στα οποία θα φανεί η χρησιμότητα της επίλυσης ενός τύπου. Για παράδειγμα : Η σχέση που συνδέει τους βαθμους Φαρενάιτ με τους βαθμούς Κελσίου είναι F = 1,8C + 32 Αν οι ενδείξεις ενός θερμομέτρου Φαρεναιτ ήταν κατά σειρά -3°, 0°, 4°, 12°, 17°, 8°, 2°, -7°, ποιες ήταν οι αντίστοιχες θερμοκρασιες ενός θερμομέτρου Κελσίου; (Εδώ η επίλυση του τύπου F=1,8C+ 32 ως προς C επιτρέπει με αντικατασταση να προσδιορίσουμε τις αντιστοιχες τιμές Κελσίου, διαφορετικά πρέπει να λύσουμε οκτώ διαφορετικές εξισώσεις). Πρέπει να δίνονται προς επίλυση γνωστοί στους μαθητές τύποι (από τη Γεωμετρία, τον τόκο, τα ποσοστά, τη φυσική κτλ.), διότι διαφορετικά, στη δυσκολία του αντικειμένου διδασκαλίας προστίθεται και το άσκοπο της όλης ενέργειας.
Ανισώσεις	Οι μαθητές πρέπει: • Να μπορούν να λύνουν ανισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο και να παριστάνουν τις λύσεις στον άξονα • Να βρίσκουν τις κοινές λύσεις δυο ή περισσότερων ανισώσεων πρώτου βαθμού • Να λύνουν απλά προβλήματα με	Η έννοια της ανίσωσης θα εισαχθεί με παραδείγματα από την καθημερινή ζωή. Η επίλυση ανισώσεων θα γίνει με ανάλογο τρόπο που έγινε και η επίλυση εξισώσεων, χρησιμοποιώντας όμως τις ιδιότητες της διάταξης: Αν $\alpha < \beta$, τότε $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$ Αν $\alpha<\beta$ και $\gamma>0$, τότε $\alpha\gamma<\beta\gamma$ Αν $\alpha<\beta$ και $\gamma<0$, τότε $\alpha\gamma>\beta\gamma$ Οι ιδιότητες αυτές θα εξηγηθούν πρώτα

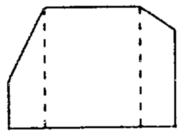
		ανισώσεις πρώτου βαθμού	με αριθμητικά παραδείγματα και ύστερα θα διατυπωθούν με μεταβλητές.

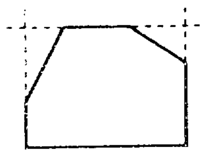
3. ΕΜΒΑΔΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ		
Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας	• Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν την έννοια του εμβαδού επίπεδης επιφάνειας και τη σχετικότητα του ως προς τη μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιούμε.	Για την κατανόηση της έννοιας του εμβαδού και τη σχετικότητα ως προς τη μονάδα μέτρησης θα δοθούν στους μαθητές κατάλληλες ασκήσεις και δραστηριότητες. Για παράδειγμα: Δίνονται ένα τετράγωνο και δυο ορθογώνια τρίγωνα.  Να κατασκευάσετε, χρησιμοποιώντας και τα τρία αυτά σχήματα, ένα ορθογώνιο, ένα τραπέζιο και ένα ορθογώνιο τρίγωνο. ■ Τι έχετε να πείτε για τα εμβαδά των νέων σχημάτων; ■ Ποιο είναι το εμβαδόν κάθε νέου σχήματος με μονάδα μέτρησης το αρχικό ορθογώνιο τρίγωνο; ■ Ποιο είναι το εμβαδόν κάθε νέου σχήματος με μονάδα μέτρησης το αρχικό τετράγωνο;
Μονάδες μέτρησης επιφανειών	• Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν τις μονάδες μέτρησης εμβαδού στο δεκαδικό σύστημα, το διεθνή συμβολισμό τους και τις μεταξύ τους σχέσεις	Θα εξηγηθεί γιατί ο συντελεστής διαδοχικών μετασχηματισμών από το m^2 στις υποδιαιρέσεις του είναι το 100 και όχι το 10 όπως στο m και στις υποδιαιρέσεις του. Για την αισθητοποίηση των μονάδων εμβαδού θα χρησιμοποιηθεί χαρτί mm και θα σχεδιαστούν σε αυτό από τους μαθητές οι μονάδες dm^2, cm^2, mm^2. 

		Έτσι για παράδειγμα το 1 dm^2 είναι το ένα εκατοστό του m^2 και όχι το ένα δέκατο. Επίσης, στη γραφή π.χ. 3, 621 m^2 το δεκαδικό ψηφίο 6 δηλώνει 6 δέκατα του m^2 δηλαδή $0{,}6 \cdot 100 = 60dm^2$, αλλά όχι 6 δεκατόμετρα όπως λαθεμένα νομίζουν πολλοί μαθητές
Εμβαδά επίπεδων σχημάτων	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να υπολογίζουν το εμβαδόν των επίπεδων σχημάτων: • Ορθογωνίου • Τριγώνου • Παραλληλογράμμου • Τραπεζίου	Για να προσδιορίσουμε το εμβαδόν ενός επίπεδου σχήματος χρησιμοποιούμε τετραγωνικές μονάδες. Φανταζόμαστε ότι το εσωτερικό του σχήματος "γεμίζει" με τετραγωνικές μονάδες.  Όπου είναι δυνατόν αυτού του είδους η προσέγγιση να συνοδεύεται από ιστορικά παραδείγματα. Θα προσδιοριστεί πρώτα το εμβαδόν ορθογωνίου που έχει πλευρές με μήκη ακεραίους και στη συνέχεια το εμβαδόν ορθογωνίου που έχει πλευρές με μήκη δεκαδικούς. Ο τύπος του εμβαδού ορθογωνίου τριγώνου θα προκύψει από το ορθογώνιο και ο τύπος του εμβαδού του τυχαίου τριγώνου από το ορθογώνιο τρίγωνο.  



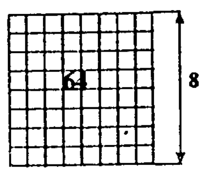
Θα τονιστεί ότι στον υπολογισμό του εμβαδού τριγώνου οποιαδήποτε πλευρά του μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βάση.
Οι τύποι των εμβαδών παραλληλογράμμου και τραπεζίου θα προκύψουν με τον χωρισμό τους σε τρίγωνα.
Και για το παραλληλόγραμμο θα τονιστεί ότι οποιαδήποτε πλευρά του μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βάση.
Θα επιλυθούν προβλήματα υπολογισμού εμβαδών πολυγώνων με χωρισμό ή συμπλήρωση της επιφανείας τους:

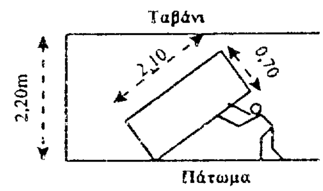
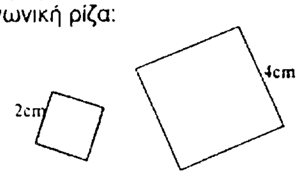




Θα δοθούν στους μαθητές δραστηριότητες με πραγματικά προβλήματα. Για παράδειγμα:
Να υπολογιστεί το κόστος βαφής της αίθουσας τους.

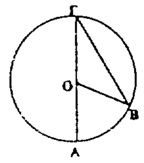
Οι τύποι υπολογισμού εμβαδών προσφέρονται για την εξάσκηση των μαθητών στην επίλυση εξισώσεων και προβλημάτων.

4. ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ		
Το Πυθαγόρειο θεώρημα	Οι μαθητές πρέπει: • Να γνωρίζουν το Πυθαγόρειο θεώρημα και το αντίστροφο του. • Να μπορούν να ελέγχουν αν ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο όταν δίνονται οι πλευρές του.	Με τη βοήθεια κατάλληλων σχημάτων οι μαθητές θα διαπιστώσουν σε διάφορες περιπτώσεις τη σχέση των εμβαδών μεταξύ των τετραγώνων με πλευρές τις πλευρές ορθογωνίου τριγώνου. Έτσι θα αναπτύξουν μια εικασία, την ισχύ της οποίας πρέπει στη συνέχεια να δικαιολογήσουν. Η δικαιολόγηση θα γίνει με κατάλληλο μετασχηματισμό των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου και με δυο τουλάχιστον τρόπους. Στη συνέχεια θα γίνει η αλγεβρική διατύπωση του Πυθαγόρειου θεωρήματος: $α^2 = β^2 + γ^2$
Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού	Οι μαθητές πρέπει : • Να γνωρίζουν την έννοια του συμβόλου $\sqrt{α}$ με $α \geq 0$ • Να μπορούν να υπολογίζουν τετραγωνικές ρίζες θετικών αριθμών: ■ με δοκιμές ■ με τη βοήθεια πινάκων ■ με τη βοήθεια της αριθμομηχανής τσέπης	Με αφορμή τον υπολογισμό της πλευράς ενός τετραγώνου όταν δίνεται το εμβαδόν του ή της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου, όταν είναι γνωστές οι δυο κάθετες πλευρές του, προκύπτει η αναγκαιότητα εισαγωγής: ■ της τετραγωνικής ρίζας και ■ των άρρητων αριθμών Ως τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού $α>0$ ορίζεται ο μη αρνητικός αριθμός που όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον α. Θα τονιστεί ότι η εξαγωγή της τετραγωνικής ρίζας είναι η αντίστροφη διαδικασία της ύψωσης στο τετράγωνο:  $8^2 = 8 \cdot 8 = 64$ $\sqrt{64} = 8$

		Θα ασκηθούν οι μαθητές και στον υπολογισμό με προσέγγιση της τετραγωνική ρίζας αριθμού. Για το σκοπό αυτό θα δοθούν κατάλληλες δραστηριότητες
Απόσταση δυο σημείων	Οι μαθητές πρέπει : • Να μπορούν να υπολογίζουν την απόσταση δυο σημείων αν είναι γνωστές οι συντεταγμένες τους.	Οι μαθητές θα χρησιμοποιούν τετραγωνισμένο χαρτί και θα βρίσκουν την απόσταση δυο σημείων όταν δίνονται οι συντεταγμένες τους ή ,θα βρίσκουν τις συντεταγμένες δυο δεδομένων σημείων και θα υπολογίζουν την απόσταση τους.
Άρρητοι αριθμοί - Το σύνολο των πραγματικών αριθμών.	Οι μαθητές πρέπει: • Να γνωρίζουν ότι υπάρχουν αριθμοί που δεν μπορούν να γραφούν με μορφή ρητού. • Να γνωρίζουν ποιοι αριθμοί αποτελούν το σύνολο των πραγματικών αριθμών. • Να παριστάνουν έναν αριθμό της μορφής $\sqrt{\alpha}$,όπου α θετικός ακέραιος, με σημείο του άξονα των πραγματικών αριθμών. • Να μπορούν να επιλύουν προβλήματα.	Η επαφή των μαθητών με τους άρρητους αριθμούς μπορεί να γίνει με αφορμή τον υπολογισμό της διαγωνίου ενός τετραγώνου πλευράς 1. Η ιστορική αναδρομή στην εξέλιξη της έννοιας του άρρητου θα βοηθήσει στο να αντιληφθούν περισσότερο οι μαθητές τη διαφορά ρητών και άρρητων αριθμών. Η παράσταση συγκεκριμένων άρρητων, π.χ. $\pm\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{5}$, $\pm\sqrt{7}$, θα γίνει με γεωμετρική κατασκευή. Να δοθούν επιλεγμένα προβλήματα και δραστηριότητες που προκαλούν το ενδιαφέρον των μαθητών όπως για παράδειγμα: ■ Μπορούμε να σηκώσουμε όρθιο το ντουλάπι ;  ■ Ποιο είναι το ύψος που μπορεί να φθάσει μια σκάλα της πυροσβεστικής; ■ Να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο με εμβαδόν ίσο προς το άθροισμα των εμβαδών των δυο τετραγώνων, χωρίς να χρησιμοποιήσετε τετραγωνική ρίζα:  Επίσης, να δοθούν προβλήματα υπολογισμού περιμέτρων και εμβαδών πολυγώνων στα οποία χρειάζεται το πυθαγόρειο θεώρημα.

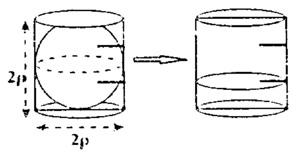
5. ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ		
Γραφικές παραστάσεις: **Εικονογράμματα** **Ραβδογράμματα** **Κυκλικά διαγράμματα** **Χρονογράμματα.**	Οι μαθητές πρέπει: • Να κατανοήσουν τη χρησιμότητα των γραφικών παραστάσεων. • Να μπορούν να αντλούν πληροφορίες από τις γραφικές παραστάσεις • Να κατασκευάζουν μια συγκεκριμένη γραφική παράσταση των δεδομένων ενός πίνακα. • Να παρουσιάζουν τα συμπεράσματα μιας έρευνας.	Θα τονισθεί μέσω παραδειγμάτων ότι ένα στατιστικό διάγραμμα χωρίς τίτλο ή χωρίς κλίμακα όχι μόνο δεν μπορεί να προσφέρει σωστές και συγκεκριμένες πληροφορίες, αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για παραπλάνηση του αναγνώστη. Για μια πετυχημένη παρουσίαση του κεφαλαίου αυτού αλλά και για την καλύτερη αφομοίωση των εννοιών κρίνεται σκόπιμο οι μαθητές να προσκομίσουν στατιστικό υλικό από διάφορα έντυπα (εφημερίδες, περιοδικά, από άλλα μαθήματα κτλ.), αλλά κυρίως να ενθαρρυνθούν μέσα από δραστηριότητες να κάνουν οι ίδιοι ατομικά ή και σε ομάδες στατιστικές έρευνες στο άμεσο περιβάλλον τους ακολουθώντας τα βασικά βήματα μιας στατιστικής έρευνας που είναι: ■ συλλογή στοιχείων ■ κατανομή συχνοτήτων ■ παρουσίαση με πίνακα και διαγράμματα ■ συμπεράσματα **Η έρευνα αυτή θα συμπληρώνεται κατά διαστήματα με κάθε καινούρια στατιστική έννοια που θα διδάσκεται, έτσι ώστε να ολοκληρωθεί ταυτόχρονα με την ολοκλήρωση της διδασκαλίας του κεφαλαίου.** Τα θέματα της έρευνας θα ήταν προτιμότερο να διαλεχτούν από τους μαθητές με βάση τα ενδιαφέροντα τους.
Βασικές έννοιες της Στατιστικής : **Πληθυσμός** **Δείγμα**	Οι μαθητές πρέπει: • Να κατανοούν τις έννοιες : πληθυσμός, δείγμα	Η έννοια και η σπουδαιότητα του δείγματος για την αξιοπιστία των συμπερασμάτων μιας έρευνας θα γίνει κατανοητή με αναφορά κατάλληλων παραδειγμάτων, όπως είναι η δημοσκόπηση που έγινε στις προεδρικές εκλογές των Η.Π.Α το 1936.

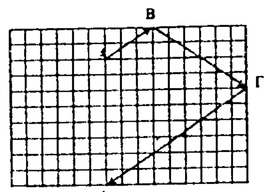
Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν : • Να συντάσσουν πίνακα κατανομής συχνοτήτων. • Να κατασκευάζουν την κατάλληλη γραφική παράσταση μιας κατανομής συχνοτήτων.	
Ομαδοποίηση παρατηρήσεων.	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν : • Να ομαδοποιούν στατιστικά δεδομένα και να παριστάνουν ομαδοποιημένες κατανομές με διαγράμματα • Να παριστάνουν μια ομαδοποιημένη κατανομή με ιστόγραμμα.	Με κατάλληλα παραδείγματα θα κατανοήσουν οι μαθητές την ανάγκη ομαδοποίησης των παρατηρήσεων και θα τονισθεί ότι: ■ Τα ορθογώνια στο ιστόγραμμα είναι συνεχόμενα (σχηματίζουν ιστό) γιατί έχουν βάσεις τις κλάσεις της κατανομής. ■ Τα ορθογώνια στο ραβδόγραμμα μπορεί να είναι οριζόντια ή κατακόρυφα, ενώ στο ιστόγραμμα είναι μόνο κατακόρυφα. ■ Στο ραβδόγραμμα τα **ύψη** των ορθογωνίων είναι ίσα με τις συχνότητες ,ενώ στο ιστόγραμμα τα **εμβαδά** των ορθογωνίων είναι ίσα προς τις συχνότητες ή τις σχετικές συχνότητες.
Μέση τιμή - Διάμεσος	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν : • Να βρίσκουν τη μέση τιμή και τη διάμεσο μιας κατανομής. • Να βρίσκουν τη μέση τιμή μιας ομαδοποιημένης κατανομής. • Να βρίσκουν τις αθροιστικές συχνότητες μιας κατανομής και να σχεδιάζουν το πολύγωνο των αθροιστικών συχνοτήτων, • Να βρίσκουν τη διάμεσο μιας ομαδοποιημένης κατανομής με τη βοήθεια του πολυγώνου των αθροιστικών συχνοτήτων.	Θα τονισθεί ότι η **μέση τιμή** λέγεται και **μέσος όρος**. Ο μέσος όρος είναι ουσιαστικά μια τιμή η οποία εξισορροπεί όλες τις διαθέσιμες τιμές που βρίσκονται πάνω και κάτω απ' αυτή. Αυτό σημαίνει ότι η μέση τιμή επηρεάζεται πολύ από τις ακραίες τιμές όταν συμβαίνει αυτές να μην αντισταθμίζονται από τις αντίστοιχες τιμές στην αντίθετη κατεύθυνση Οι μαθητές θα διαπιστώσουν μέσα από κατάλληλα παραδείγματα, ότι κατανομές με την ίδια διάμεσο ή μέση τιμή μπορεί να είναι πολύ διαφορετικές . Μόνη της η μέση τιμή δεν αρκεί για την σύγκριση των κατανομών αυτών, αφού παραβλέπει σπουδαίες ιδιότητες των αριθμών. Πιο συγκεκριμένα η μέση τιμή μας πληροφορεί για τον μέσο όρο των παρατηρήσεων, δεν μας πληροφορεί όμως για το πώς οι παρατηρήσεις αυτές είναι κατανεμημένες γύρω από την μέση τιμή.

6. ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ		
Εγγεγραμμένες γωνίες-Επίκεντρες γωνίες	Οι μαθητές πρέπει: • Να γνωρίζουν την έννοια της επίκεντρης και της εγγεγραμμένης γωνίας και να μπορούν να σχεδιάζουν τέτοιες γωνίες • Να γνωρίζουν τη σχέση του μέτρου μιας επίκεντρης γωνίας και του μέτρου του αντίστοιχου τόξου • Να γνωρίζουν τη σχέση του μέτρου μιας εγγεγραμμένης γωνίας και του μέτρου του αντίστοιχου τόξου	Οι μαθητές στην αρχή θα μετρήσουν με το μοιρογνωμόνιο τους τη επίκεντρη και τη εγγεγραμμένη γωνία που βαίνουν στο ίδιο τόξο και θα διατυπώσουν μια εικασία για τη σχέση των μέτρων τους. Στην ειδική περίπτωση όπου η μία πλευρά της επίκεντρης γωνίας ταυτίζεται με μία πλευρά της εγγεγραμμένης γωνίας γίνεται απόδειξη. 
Κανονικά πολύγωνα	Οι μαθητές πρέπει: • Να γνωρίζουν τον ορισμό του κανονικού πολυγώνου • Να γνωρίζουν ότι ένα κανονικό πολύγωνο εγγράφεται σε κύκλο • Να μπορούν να υπολογίζουν την γωνία και την κεντρική γωνία κανονικών πολυγώνων • Να μπορούν να κατασκευάζουν κανονικά πολύγωνα	Η κατασκευή ενός κανονικού πολυγώνου θα γίνεται με δεδομένα την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου και τον αριθμό των πλευρών του.
Μήκος κύκλου	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: • Να υπολογίζουν το μήκος ενός κύκλου όταν γνωρίζουν την ακτίνα του.	Για την εύρεση του μήκους του κύκλου οι μαθητές να κάνουν μόνοι τους μια πρώτη εκτίμηση του π με τη βοήθεια διάφορων αντικειμένων π.χ. νομισμάτων, τροχών, κυλινδρικών κονσερβών κτλ. και στη συνέχεια θα συμπληρώσουν τον πίνακα: Μήκος κύκλου | | | | | Μήκος διαμέτρου | | | | | Κατόπιν θα κάνουν τη γραφική παράσταση για να διαπιστώσουν την αναλογία των μεγεθών Γ και δ, τα οποία τελικά συνδέονται με τη σχέση Γ=πδ

<table>
<tr>
<td>Εμβαδόν κύκλου</td>
<td>Οι μαθητές πρέπει να μπορούν:
• Να υπολογίζουν το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου, όταν γνωρίζουν την ακτίνα του.</td>
<td>Για τον υπολογισμό του εμβαδού του κύκλου μπορεί να χωριστεί ο κύκλος σε όσο το δυνατόν πιο πολλά ίσα μέρη (κυκλικούς τομείς), που τοποθετούμενοι κατάλληλα ο ένας δίπλα στον άλλον μας δίνουν ένα σχήμα που προσεγγίζει ορθογώνιο με βάση $\frac{1}{2}Γ$ και ύψος ρ,
οπότε $Ε=\frac{1}{2}\cdot 2πρ\cdot ρ = πρ^2$</td>
</tr>
<tr>
<td>Μήκος τόξου-Εμβαδόν κυκλικού τομέα</td>
<td>Οι μαθητές πρέπει να μπορούν:
• Να υπολογίζουν το μήκος ενός τόξου όταν δίνεται η ακτίνα του κύκλου και το μέτρο του τόξου σε μοίρες ή σε ακτίνια.
• Να υπολογίζουν το εμβαδόν κυκλικού τομέα όταν δίνεται η ακτίνα του κύκλου και το μέτρο του αντίστοιχου τόξου σε μοίρες ή σε ακτίνια.</td>
<td>Ο τύπος του μήκους του τόξου και του εμβαδού του κυκλικού τομέα θα προκύψουν μέσω του τέταρτου αναλόγου. Δηλαδή ο κύκλος θεωρείται ως τόξο 360^0 οπότε έχουμε:
<table>
<tr><td>Τόξο</td><td>360^o</td><td>$μ^o$</td></tr>
<tr><td>Μήκος</td><td>$2πρ$</td><td>x</td></tr>
</table>
Αντίστοιχα για τον κυκλικό τομέα έχουμε:
<table>
<tr><td>Τόξο</td><td>360^o</td><td>$μ^o$</td></tr>
<tr><td>Εμβαδόν</td><td>$πρ^2$</td><td>x</td></tr>
</table>
Θα δοθεί ιδιαίτερη σημασία στις μορφές των τύπων όταν το μέτρο του τόξου εκφράζεται σε ακτίνια, διότι οι τύποι αυτοί είναι πολύ χρήσιμοι σε άλλους κλάδους (π.χ. Φυσική) αλλά και για τη συνέχιση των σπουδών τους (π.χ. στην Ανάλυση).
Θα τονιστεί ότι η σύγκριση δύο τόξων ως προς τα μέτρα τους, έχει νόημα μόνο στην περίπτωση που τα τόξα ανήκουν στον ίδιο ή σε ίσους κύκλους
Θα δοθούν στους μαθητές κατάλληλα προβλήματα με τα οποία θα διαπιστώσουν ότι δυο τόξα διαφορετικών κύκλων μπορεί να έχουν το ίδιο μέτρο αλλά να μην είναι ίσα.
Επίσης μπορεί να έχουν το ίδιο μήκος χωρίς και πάλι να είναι ίσα.
Για το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου θα αναφερθούν και οι τύποι με τη βοήθεια της διαμέτρου, αφού για πολλά σώματα (π.χ. δίσκους, σφαίρες) υπολογίζουμε τη διάμετρο τους και όχι την ακτίνα τους, διότι δεν γνωρίζουμε το κέντρο τους.</td>
</tr>
</table>

7. ΜΕΤΡΗΣΗ ΣΤΕΡΕΩΝ		
Μονάδες μέτρησης όγκου	Οι μαθητές πρέπει: • Να γνωρίζουν τις μονάδες μέτρησης όγκου στο δεκαδικό μετρικό σύστημα, τις μεταξύ τους σχέσεις και το διεθνή συμβολισμό τους	Ο τρόπος παρουσίασης των μονάδων όγκου θα είναι ανάλογος με τον τρόπο παρουσίασης των μονάδων επιφάνειας.
Σχετικές θέσεις επιπέδων και ευθειών	Οι μαθητές πρέπει: • Να αναγνωρίζουν τη σχετική θέση ■ δύο επιπέδων ■ δύο ευθειών ■ μιας ευθείας και ενός επιπέδου.	Θα γίνει εποπτική παρουσίαση των δυνατών θέσεων δύο ευθειών, δύο επιπέδων, μιας ευθείας και ενός επιπέδου στο χώρο και θα ακολουθήσει η μέτρηση των στερεών.
Ευθεία κάθετη σε επίπεδο	Οι μαθητές πρέπει • Να κατανοούν πότε μια ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο.	Οι μαθητές θα αναζητήσουν και θα εντοπίσουν στο χώρο τους ευθείες κάθετες σε επίπεδα
Πρίσμα κύλινδρος Στοιχεία πρίσματος και κυλίνδρου Εμβαδόν και όγκος αυτών.	Οι μαθητές πρέπει • Να αναγνωρίζουν αν ένα στερεό είναι πρίσμα και το είδος του πρίσματος. • Να υπολογίζουν το εμβαδόν της παράπλευρης και της ολικής επιφάνειας καθώς και τον όγκο ορθού πρίσματος.	Η παρουσίαση των στερεών θα γίνει με τη βοήθεια κατάλληλων υλικών σωμάτων, που βρίσκονται στο άμεσο περιβάλλον του μαθητή καθώς και με αξιοποίηση του εποπτικού υλικού. Θα εξετασθούν μόνο τα ορθά πρίσματα. Ο υπολογισμός του εμβαδού ενός πρίσματος ή ενός κυλίνδρου διευκολύνεται με την ανάπτυξη της επιφάνειά τους στο επίπεδο. Με αφορμή τον υπολογισμό της πλευράς ενός κύβου όταν δίνεται ο όγκος του, θα γίνει αναφορά στην έννοια της κυβικής ρίζας.
Πυραμίδα και κώνος -Στοιχεία πυραμίδας και κώνου -Εμβαδόν και όγκος	Οι μαθητές πρέπει • Να αναγνωρίζουν αν ένα στερεό είναι πυραμίδα και το είδος της πυραμίδας αυτής. • Να υπολογίζουν το εμβαδόν της παράπλευρης και της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας και τόν όγκο της.	Για την ανακάλυψη του τύπου του όγκου πυραμίδας θα μετρήσουν οι μαθητές πόσες φορές χρειάζονται το περιεχόμενο της για να γεμίσουν ένα πρίσμα με την ίδια βάση και το ίδιο ύψος. (Για το γέμισμα των στερεών μπορεί να χρησιμοποιηθεί π.χ. άμμος ή αλεύρι).

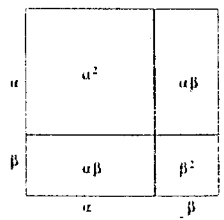
	• Να αναγνωρίζουν αν ένα στερεό είναι κώνος και να υπολογίζουν το εμβαδόν της κυρτής και της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του.	Οι τύποι των αντίστοιχων μεγεθών για τον κύλινδρο και τον κώνο θα προκύψουν αναλογικά από τους προηγούμενους τύπους. Ο υπολογισμός του εμβαδού μιας πυραμίδας διευκολύνεται με το ανάπτυγμά της στο επίπεδο.
Σφαίρα-Στοιχεία σφαίρας-Μέτρηση σφαίρας	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: • Να αναγνωρίζουν τη σφαίρα και να υπολογίζουν τον όγκο και την επιφάνειά της.	Στην ενότητα αυτή περιλαμβάνονται έννοιες από τη γεωμετρία της σφαίρας, π.χ. τομή σφαίρας από επίπεδο, παράλληλοι κύκλοι, μέγιστοι κύκλοι, γεωγραφικές συντεταγμένες, που ήδη έχουν συναντήσει οι μαθητές σε άλλα μαθήματα. Έτσι κύριος στόχος είναι η ανακεφαλαίωση και η ακριβέστερη παρουσίαση των εννοιών αυτών. Για την ανακάλυψη του τύπου του όγκου της Σφαίρας, να προσδιορίσουν πειραματικά οι μαθητές τη σχέση του όγκου της προς τον όγκο του κυλίνδρου με την ίδια ακτίνα ρ και ύψος 2ρ:  $V_{Σφ}=\frac{2}{3}V_{Κυλ}=\frac{2}{3}πρ^2\cdot 2ρ=\frac{4}{3}πρ^3$

8. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ		
Η έννοια του διανύσματος	Οι μαθητές πρέπει: • Ν α κατανοήσουν την ανάγκη παράστασης ορισμένων μεγεθών με διανύσματα • Να γνωρίζουν τα στοιχεία ενός διανύσματος • Να γνωρίζουν πότε δυο διανύσματα είναι ίσα, πότε αντίθετα και να μπορούν να σχεδιάζουν τέτοια διανύσματα	Η έννοια του διανύσματος θα προκύψει από την ανάγκη παράστασης μιας μετατόπισης ή φυσικών μεγεθών όπως είναι η ταχύτητα, η δύναμη κτλ., τα οποία δεν ορίζονται μόνο από την αριθμητική τους τιμή. Για το λόγο αυτό το διάνυσμα έχει ιδιαίτερη σημασία όχι μόνο για τα Μαθηματικά αλλά και για πολλές άλλες επιστήμες , αφού προσφέρει τη δυνατότητα μαθηματικοποίησης μεγεθών που για τον προσδιορισμό τους χρειάζονται και άλλα στοιχεία εκτός της αριθμητικής τιμής τους. Δεν θα γίνει αναφορά στις έννοιες ελεύθερο και εφαρμοστό διάνυσμα.
Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων	• Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να βρίσκουν το άθροισμα και τη διαφορά διανυσμάτων	Το άθροισμα και η διαφορά διανυσμάτων θα ορισθούν γεωμετρικά (κανόνας του παραλληλογράμμου). Θα αναφερθούν παραδείγματα διαδοχικών μετατοπίσεων, σύνθεσης δυνάμεων κτλ.
Συντεταγμένες διανύσματος	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: • Να βρίσκουν τις συντεταγμένες ενός διανύσματος, καθώς και το μέτρο του από τις συντεταγμένες του. • Να βρίσκουν το άθροισμα και τη διαφορά διανυσμάτων από τις συντεταγμένες τους	Οι μαθητές θα εργάζονται σε τετραγωνισμένο χαρτί. Να δοθούν στους μαθητές κατάλληλες δραστηριότητες που θα προκαλέσουν το ενδιαφέρον τους όπως για παράδειγμα: Σε ένα ηλεκτρονικό παιχνίδι μια μπίλια κινείται εντός ενός ορθογώνιου πλαισίου. Στο σχήμα φαίνεται η κίνηση της από το σημείο Α στο Β, από το Β στο Γ και από το Γ στο Δ.  Να σχεδιάσετε τις δυο επόμενες προσκρούσεις της μπίλιας στις πλευρές του πλαισίου.

Δ. Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά της

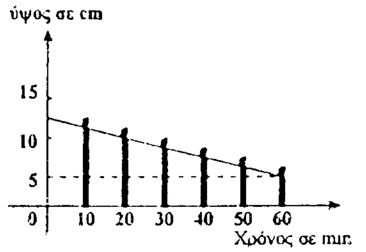
Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Περιεχόμενα	Στόχοι	Οδηγίες
1. ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ		
Πράξεις με αριθμούς	Οι μαθητές πρέπει: • Να εμπεδώσουν τις τεχνικές των τεσσάρων πράξεων καθώς και τις βασικές τους ιδιότητες • Να εμπεδώσουν τις ιδιότητες των δυνάμεων • Να γνωρίζουν και να χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των ριζών ■ $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\beta}$ ■ $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$	Η ενότητα έχει σκοπό την προετοιμασία των μαθητών για την ομαλή εισαγωγή τους στον αλγεβρικό λογισμό. Η επανάληψη των τεσσάρων πράξεων θα γίνει μέσα από κατάλληλα προβλήματα και δραστηριότητες. Οι ιδιότητες των ριζών προσφέρονται για την εισαγωγή των μαθητών στην αποδεικτική διαδικασία. Σε κάθε περίπτωση θα προηγούνται αριθμητικά παραδείγματα ώστε να οδηγούνται οι μαθητές σε μια εικασία την οποία στη συνέχεια πρέπει να αποδείξουν. Η απόδειξη θα είναι η παράθεση μιας σειράς ισχυρισμών και επιχειρημάτων όπου η αλήθεια του καθενός θα προκύπτει από την αλήθεια των προηγουμένων για να καταλήξουμε έτσι σε ένα συμπέρασμα με γενική ισχύ.
Μονώνυμα και πολυώνυμα	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν : • Να βρίσκουν την αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης • Να διακρίνουν αν μια αλγεβρική παράσταση είναι μονώνυμο ή πολυώνυμο και να προσδιορίζουν το βαθμό του.	Οι έννοιες του μονωνύμου και του πολυωνύμου εισάγονται με τη βοήθεια γνωστών τύπων όπως π. χ. ο τύπος του εμβαδού κύκλου, ο τύπος υπολογισμού του τόκου κτλ. Να συζητηθούν ιδιαίτερα οι περιπτώσεις παραστάσεων π. χ. της μορφής $\alpha\chi^2+2\chi-5$ και $2\chi^2+1/\chi$.
Πράξεις με μονώνυμα	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν • Να προσθέτουν, να πολλαπλασιάζουν και να διαιρούν μονώνυμα • Να χρησιμοποιούν την αναγωγή των όμοιων όρων για την απλούστευση της γραφής ενός πολυωνύμου	

Πρόσθεση Αφαίρεση Πολλαπλα- σιασμός πολυωνύμων	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: • Να προσθέτουν και να αφαιρούν πολυώνυμα • Να πολλαπλασιάζουν μονώνυμο με πολυώνυμο, καθώς και πολυώνυμο με πολυώνυμο.	Θα δοθεί ιδιαίτερη προσοχή για την αποφυγή λαθών που οφείλονται συνήθως: ■ στην αδυναμία αναγνώρισης όμοιων μονωνύμων ■ στην αδυναμία εφαρμογής της προτεραιότητας των πράξεων ■ στην λανθασμένη εφαρμογή του κανόνα των προσήμων στον πολλαπλασιασμό.
Αξιοσημείωτες ταυτότητες	Οι μαθητές πρέπει: • Να γνωρίζουν τις βασικές ταυτότητες • Να μπορούν να αποδεικνύουν μια απλή ταυτότητα	Θα αναφερθούν οι ταυτότητες: $(\alpha\pm\beta)^2=\alpha^2\pm2\alpha\beta+\beta^2$ $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$ $(\alpha\pm\beta)^3=\alpha^3\pm3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2\pm\beta^3$ $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$ $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$ Η ενότητα των ταυτοτήτων προσφέρεται για την εξάσκηση των μαθητών στην αποδεικτική διαδικασία. Οι μαθητές θα εξηγούν και φραστικά τα διαδοχικά βήματα της απόδειξης. Είναι χρήσιμο να γίνει και γεωμετρική ερμηνεία μιας ταυτότητας και να δοθεί ως δραστηριότητα η γεωμετρική ερμηνεία μερικών άλλων. Η ενασχόληση αυτή των μαθητών με τις ταυτότητες θα τους βοηθήσει να τις κατανοήσουν καλύτερα και να δουν τη μαθηματική συνάφεια Άλγεβρας και Γεωμετρίας  $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$
Παραγοντο- ποίηση αλγε- βρικών παραστάσεων	• Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να μετατρέπουν πολυώνυμα σε γινόμενο παραγόντων	Θα εξηγηθεί η σημασία της παραγοντοποίησης για την απλοποίηση ρητών παραστάσεων και την επίλυση εξισώσεων. Θα τονισθεί ότι η διαδικασία της παραγοντοποίησης ολοκληρώνεται όταν κανένας παράγοντας δεν μπορεί να παραγοντοποιηθεί περαιτέρω. Οι μαθητές θα ασκηθούν κυρίως στην

		παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων όταν: ■ Οι όροι έχουν κοινό παράγοντα ή εμφανίζεται κοινός παράγοντας με χωρισμό των όρων σε ομάδες ■ Είναι διαφορά τετραγώνων ■ Είναι ανάπτυγμα τετραγώνου ■ Είναι τριώνυμο της μορφής $\chi^2+(\alpha+\beta)\chi+\alpha\beta$ ■ Είναι άθροισμα ή διαφορά κύβων
Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. αλγεβρικών παραστάσεων	• Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να βρίσκουν το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. αλγεβρικών παραστάσεων.	Οι έννοιες του ΜΚΔ και του ΕΚΠ θα παρουσιαστούν με συντομία και κατ'αναλογίαν προς τις αντίστοιχες έννοιες των φυσικών αριθμών.
Διαίρεση πολυωνύμων	• Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να βρίσκουν το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(\chi)$ με $(\chi \pm \alpha)$	Η διαίρεση πολυωνύμων θα αναπτυχθεί κατ'αναλογίαν προς την αλγοριθμική διαίρεση των θετικών ακεραίων.
Κλασματικές αλγεβρικές παραστάσεις	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: • Να απλοποιούν κλασματικές παραστάσεις • Να πολλαπλασιάζουν και να διαιρούν κλασματικές παραστάσεις • Να προσθέτουν και να αφαιρούν κλασματικές παραστάσεις	Να μη γίνει κατάχρηση με υπερβολικά μεγάλες κλασματικές παραστάσεις οι οποίες κουράζουν άσκοπα τους μαθητές και των οποίων η παιδευτική σημασία είναι αμφίβολη.

2. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ		
Η έννοια της συνάρτησης	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν : • Να εκφράζουν ένα μέγεθος συναρτήσει ενός άλλου. • Να συμπληρώνουν πίνακα τιμών μιας συνάρτησης.	Η έννοια της συνάρτησης θα εισαχθεί με κατάλληλα παραδείγματα από την καθημερινή εμπειρία, με τα οποία θα διαπιστώνεται ότι σε ορισμένες περιπτώσεις, η τιμή ενός μεγέθους καθορίζεται από την τιμή ενός άλλου μεγέθους. Στην κατασκευή του πίνακα τιμών μιας συνάρτησης να μην παραβλέπουν οι μαθητές το πεδίο ορισμού της. Είναι αυτονόητο ότι το πεδίο ορισμού προσδιορίζεται από τα δεδομένα του εκάστοτε προβλήματος . Για παράδειγμα: ■ Αν μια δεξαμενή αδειάζει σε 3 ώρες, τότε οι τιμές που παίρνει ο χρόνος t είναι $0 \leq t \leq 3$. ■ Αν τα χρήματα ψ που πληρώνω κάθε φορά που παίρνω ταξί για χ km υπολογίζονται από τον τυπο ψ=50χ+200 τότε είναι προφανές ότι το χ παίρνει μόνο θετικές τιμές
Γραφική παράσταση συνάρτησης	• Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης από τον αντίστοιχο πίνακα τιμών. • Να βρίσκουν τις συντεταγμένες ενός σημείου, της γραφικής παράστασης. • Να ελέγχουν αν ενα σημείο ανήκει η οχι στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης. • Να ελέγχουν αν μια «καμπύλη» αποτελεί ή όχι τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.	Από τον πίνακα τιμών και τη γραφική παράσταση θα προκύψει η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή μιας συνάρτησης. Θα τονιστεί η σπουδαιότητα της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης για τις άμεσες πληροφορίες που μας παρέχει ως προς τον τρόπο που μεταβάλλονται οι τιμές της. Κύρια επιδίωξη είναι η εξοικείωση των μαθητών με την "ανάγνωση", κατασκευή και ερμηνεία των γραφικων παραστάσεων, ιδιαίτερα στις περιπτώσεις που περιγράφουν τη λύση πραγματικών προβλημάτων. Να εξηγηθεί η διαφορά ενός ορθοκανονικού και ενός μη ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων.

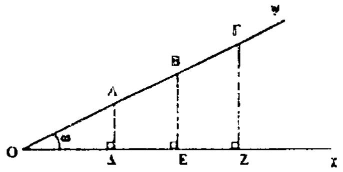
Η συνάρτηση ψ = αχ	Οι μαθητές πρέπει: • Να γνωρίζουν τη σχεση που συνδέει τις αντίστοιχες τιμές δυο αναλόγων ποσών • Να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης ψ=αχ • Να βρίσκουν την εξίσωση μιας ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.	Με κατάλληλα αριθμητικά παραδείγματα θα διευκρινισθεί ο ρόλος του α στη συνάρτηση ψ=αχ.
Η συνάρτηση ψ=αχ+β	Οι μαθητές πρέπει να: • Να γνωρίζουν ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης ψ = α χ + β είναι ευθεία και να μπορούν να σχεδιάζουν την ευθεία αυτή. • Να γνωρίζουν ότι κάθε εξίσωση της μορφής αχ+βψ=γ με $α \neq 0$ ή $β \neq 0$, παριστάνει ευθεία και να σχεδιάζουν την ευθεία αυτή. • Να βρίσκουν την εξίσωση μιας ευθείας από την γραφική της παράσταση. • Να μπορούν να προσδιορίζουν τα σημεία τομής των αξόνων και της ευθείας αχ+βψ=γ.	Η γραφική παράσταση της ψ=αχ+β θα γίνει στην αρχή με την παράλληλη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της ψ=αχ κατά β μονάδες άνω ή κάτω. Με κατάλληλα παραδείγματα θα διευκρινισθεί ο ρόλος των παραμέτρων α, β στην ψ = αχ + β. Θα αναφερθούν προβλήματα των οποίων η λύση θα προκύπτει από τη μελέτη των συναρτήσεων ψ = αχ και ψ =αχ + β. Για παράδειγμα: Στην παρακάτω εικόνα παριστάνεται το ύψος ενός καιγόμενου κεριού σε σχέση με το χρόνο καύσης.  Να απαντήσετε στα ερωτήματα: ■ Πόσο κερί καίγεται σε 10 min; ■ Ποια ευθεία σχηματίζει η κορυφή του κεριού στις διάφορες θέσεις; ■ Πόσο χρόνο αναμένεται να διαρκέσει η καύση του κεριού; ■
Η συνάρτηση $ψ=αχ^2$ Εξίσωση παραβολής	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: • Να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $ψ=αχ^2$ • Να βρίσκουν, την εξίσωση της παραβολής από τη γραφική της παράσταση.	Η εισαγωγή της τετραγωνικής συνάρτησης θα γίνει με κατάλληλα παραδείγματα όπως: το εμβαδόν ψ τετραγώνου πλευράς χ είναι $ψ= χ^2$, το εμβαδόν ορθογωνίου με βάση διπλάσια από το ύψος είναι $ψ= 2χ^2$ Ιδιαίτερη προσοχή θα δοθεί στον άξονα συμμετρίας της παραβολής και στη σχέση των συντεταγμένων των συμμε-

		τρικών σημείων. Τέλος με κατάλληλα παραδείγματα θα τονισθεί η σχέση του συντελεστή α με το σχήμα και τη θέση της γραφικής παράστασης.
Η συνάρτηση $ψ=\frac{α}{x}$ Εξίσωση υπερβολής	Οι μαθητές πρέπει: • Να γνωρίζουν τη σχέση που συνδέει δυο αντιστρόφως ανάλογα ποσά. • Να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $ψ=\frac{α}{x}$	Η συνάρτηση $ψ=\frac{α}{x}$ θυα εισαχθεί με κατάλληλα παραδείγματα, όπως : ένα ορθογώνιο έχει σταθερό εμβαδόν α. Ποια σχέση συνδέει το μήκος του x με το πλάτος του ψ; Ιδιαίτερη σημασία θα δοθεί στο κέντρο συμμετρίας της γραφικής παράστασης και θα τονισθεί η σχέση των συντεταγμένων των συμμετρικών σημείων.

3. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ		
Εξισώσεις πρώτου βαθμού	• Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να λύνουν εξισώσεις πρώτου βαθμού	Η ενότητα έχει επαναληπτικό χαρακτήρα και η επανάληψη θα γίνει με κατάλληλες ασκήσεις και προβλήματα.
Εξισώσεις δευτέρου βαθμού	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: • Να λύνουν εξισώσεις δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων • Να βρίσκουν τις λύσεις μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού με τη βοήθεια του τύπου. • Να μετατρέπουν ένα τριώνυμο σε γινόμενο παραγόντων • Να μπορούν να λύνουν προβλήματα που οδηγούν σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού	Η εισαγωγή της εξίσωσης δευτέρου βαθμού θα γίνει με κατάλληλα προβλήματα. Η μέθοδος της συμπλήρωσης τετραγώνου, είναι ένα σημαντικό "εργαλείο " για την ανεύρεση και την κατανόηση του τύπου επίλυσης μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Θα αναφερθούν και παραδείγματα εξισώσεων που είναι αδύνατες ή αόριστες. Η γενική περίπτωση της διερεύνησης εξίσωσης με παράμετρο είναι στην τάξη αυτή εκτός προγράμματος.
Κλασματικές εξισώσεις	• Να μπορούν να λύνουν κλασματικές εξισώσεις που μετασχηματίζονται σε εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού.	Με παραδείγματα θα φανεί η αναγκαιότητα των περιορισμών στις τιμές του αγνώστου μιας εξίσωσης.

4 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ		
Η έννοια του συστήματος Γραφική επίλυση	• Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να λύνουν γραφικά ένα σύστημα	Η ενότητα αναφέρεται σε γραμμικά συστήματα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους. Η γραφική επίλυση θα βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν την έννοια της λύσης ενός συστήματος ως ζεύγους αριθμών και επίσης να κατανοήσουν ότι ένα σύστημα μπορεί να είναι αδύνατο ή αόριστο.
Αλγεβρική επίλυση συστήματος	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: • να λύνουν ένα σύστημα με τη μέθοδο: ■ της αντικατάστασης ■ των αντίθετων συντελεστών • Να λύνουν προβλήματα με τη βοήθεια συστημάτων	
Ανισότητες Ανισώσεις με έναν άγνωστο	Οι μαθητές πρέπει: • Να γνωρίζουν και να χρησιμοποιούν τις ιδιότητες της διάταξης: ■ Αν $α>β$ τότε $α+γ>β+γ$ και αντιστρόφως ■ Αν $α>β$ και $γ>δ$, τότε $α+γ>β+δ$ ■ Αν $α>β$ και $γ>0$, τότε $αγ>βδ$ ■ Αν $α>β$ και $γ<0$, τότε $αγ<βδ$ • Να μπορούν να λύνουν ανισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο	Οι ιδιότητες των ανισοτήτων θα ανακαλύπτονται από τους μαθητές, αφού προηγηθούν αριθμητικά παραδείγματα. Θα ακολουθεί η απόδειξη των ιδιοτήτων. Για την εμπέδωση των ιδιοτήτων των ανισώσεων θα λυθούν ασκήσεις υπολογισμού των ορίων μεταβολής αθροίσματος και γινομένου δυο μεταβλητών όταν είναι γνωστά τα όρια της μεταβολής των μεταβλητών αυτών.
Γραμμικές ανισώσεις	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: • Να λύνουν γραφικά μια γραμμική ανίσωση • Να λύνουν γραφικά ένα σύστημα γραμμικών ανισώσεων • Να λύνουν γραφικά απλά προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού.	Τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού θα βοηθήσουν τους μαθητές να δουν τη χρησιμότητα των Μαθηματικών στην αντιμετώπιση προβλημάτων όχι μόνο μαθηματικών αλλά και οικονομικών, βιομηχανίας κτλ.

5. ΤΡΙΓΩΝΟ-ΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ		
Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων	Οι μαθητές πρέπει: • Να μπορούν να υπολογίζουν το λόγο δύο ευθυγράμμων τμημάτων	Οι μαθητές θα κατανοήσουν ότι με το λόγο δυο τμημάτων έχουμε έναν άλλο τρόπο σύγκρισης τους. Με παραδείγματα θα γίνει κατανοητό ότι ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων είναι ανεξάρτητος από τη μονάδα μέτρησης των τμημάτων αυτών.
Θεώρημα του Θαλή	• Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν το θεώρημα του Θαλή και να μπορούν να το χρησιμοποιούν στον υπολογισμό μηκών.	
Όμοια πολύγωνα -Όμοια τρίγωνα	Οι μαθητές πρέπει: • Να γνωρίζουν την έννοια των όμοιων πολυγώνων. • Να γνωρίζουν ότι δυο τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν δυο γωνίες ίσες.	Δύο σχήματα είναι όμοια, όταν το ένα προκύπτει από το άλλο με τη διαδικασία της μεγέθυνσης ή της σμίκρυνσης. Θα επισημανθεί ότι σε δυο όμοια σχήματα, ομόλογες κορυφές είναι οι κορυφές των ίσων γωνιών και ομόλογες πλευρές εκείνες που συνδέουν ζεύγη ομολόγων κορυφών.
Εμβαδά ομοίων σχημάτων	• Οι μαθητές πρέπει να χρησιμοποιούν τη σχέση των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων για τον υπολογισμό εμβαδών.	Θα δοθούν στους μαθητές προβλήματα υπολογισμού εμβαδών σχημάτων που είναι σχεδιασμένα υπό κλίμακα, π.χ. υπολογισμός εμβαδού διαμερίσματος από τα σχέδια του Μηχανικού.
Εφαπτομένη οξείας γωνίας	Οι μαθητές πρέπει • Να γνωρίζουν πως ορίζεται η εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου • Να μπορούν να υπολογίζουν την εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου όταν δίνονται οι πλευρές του. • Να μπορούν να σχεδιάζουν μια γωνία της οποίας δίνεται η εφαπτομένη.	Οι μαθητές να διαπιστώσουν αρχικά με μετρήσεις ότι σε μια ορισμένη οξεία γωνία ω οι λόγοι π.χ. $\frac{ΑΔ}{ΟΔ}, \frac{ΒΕ}{ΟΕ}, \frac{ΓΖ}{ΟΖ}$ κτλ. είναι ίσοι και στη συνέχεια να αποδείξουν την αλήθεια του ισχυρισμού για τυχόν σημείο στη πλευρά της γωνίας.

	• Να γνωρίζουν πως μεταβάλλεται η εφαπτομένη οξείας γωνίας, όταν μεταβάλλεται η γωνία • Να μπορούν να υπολογίζουν με τη βοήθεια της εφαπτομένης διάφορες αποστάσεις.	
Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας	Οι μαθητές πρέπει: • Να γνωρίζουν πως ορίζεται το ημίτονο και το συνημίτονο οξείας γωνίας. • Να μπορούν να υπολογίζουν το ημίτονο και το συνημίτονο οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου όταν δίνονται οι πλευρές του • Να μπορούν να σχεδιάζουν μια γωνία της οποίας δίνεται το ημίτονο ή το συνημίτονο • Να γνωρίζουν πως μεταβάλλεται το ημίτονο και το συνημίτονο οξείας γωνίας όταν μεταβάλλεται η γωνία. • Να μπορούν με τη βοήθεια του ημιτόνου και του συνημιτόνου να υπολογίζουν διάφορες αποστάσεις.	Όπως και για την εφαπτομένη, αρχικά θα διαπιστωθεί ότι οι αντίστοιχοι λόγοι πλευρών εξαρτώνται μόνο από το μέτρο της γωνίας Με τη βοήθεια γεωμετρικών γνώσεων θα υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30^0, 45^0, 60^0.
Τριγωνομετρικοί αριθμοί αμβλείας γωνίας	Οι μαθητές πρέπει: • Να γνωρίζουν πως ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας ή αμβλείας γωνίας, με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων • Να μπορούν να υπολογίζουν τριγωνομετρικούς αριθμούς με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων	
Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών	Οι μαθητές πρέπει: • Να γνωρίζουν τη σχέση που συνδέει τους τριγωνομετρικούς αριθμούς παραπληρωματικών γωνιών και να υπολογίζουν τριγωνομετρικούς αριθμούς αμβλείας γωνίας με βάση αυτή τη σχέση.	

Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας	Οι μαθητές πρέπει: • Να γνωρίζουν τις βασικές ταυτότητες $ημ^2ω+συν^2ω=1$ και $εφω=\frac{ημω}{συνω}$ και να τις χρησιμοποιούν για την απόδειξη απλών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων.	Θα αποδειχθούν οι βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες $ημ^2ω+συν^2ω=1$ και $εφω=\frac{ημω}{συνω}$.
Νόμος ημιτόνων - Νόμος συνημιτόνων	• Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν τους νόμους των ημιτόνων και συνημιτόνων και να τους εφαρμόζουν στη λύση προβλημάτων.	Για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων οι μαθητές θα χρησιμοποιούν υπολογιστή τσέπης.

6. Πιθανότητες		
Σύνολα	Οι μαθητές πρέπει : • Να μπορούν να ορίζουν ένα σύνολο με περιγραφή ή αναγραφή των στοιχείων του και να το παριστάνουν με διάγραμμα Venn. • Να κατανοούν πότε δυο σύνολα είναι ίσα και πότε ένα σύνολο είναι υποσύνολο ενός άλλου συνόλου. • Να μπορούν να βρίσκουν την ένωση και την τομή δυο συνόλων καθώς και το συμπλήρωμα ενός συνόλου.	Οι σχέσεις με τα σύνολα και οι σχετικές πράξεις θα εισαχθούν με κατάλληλα παραδείγματα καθώς και με διαγράμματα Venn.
Δειγματικός χώρος-Ενδεχόμενα.	Οι μαθητές πρέπει : • Να γνωρίζουν τι λέγεται πείραμα τύχης, δειγματικός χώρος και ενδεχόμενο. • Να γνωρίζουν τις πράξεις μεταξύ των ενδεχομένων: ■ $A \cup B$ ■ $A \cap B$ ■ A' • Να γνωρίζουν ποιο ενδεχόμενο ονομάζεται βέβαιο, ποιο αδύνατο, καθώς και ποια ενδεχόμενα λέγονται ασυμβίβαστα και αντίθετα.	Η εισαγωγή στις βασικές έννοιες των πιθανοτήτων θα γίνει με απλά παραδείγματα από την καθημερινή ζωή. Οι μαθητές πρέπει να συνειδητοποιήσουν ότι σε ένα πείραμα τύχης ενώ είναι γνωστά τα δυνατά αποτελέσματα δεν μπορεί να προβλεφθεί με βεβαιότητα το αποτέλεσμα σε μια συγκεκριμένη εκτέλεση του. Ιδιαίτερη προσοχή θα δοθεί στην εύρεση του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης με τη βοήθεια δενδρογράμματος ή σχετικού πίνακα.
Έννοια της πιθανότητας	Οι μαθητές πρέπει: • Να γνωρίζουν τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας. • Να γνωρίζουν τους κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων (προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων) και να τους χρησιμοποιούν στις εφαρμογές.	Η προσέγγιση στην έννοια της πιθανότητας ενός ενδεχομένου θα γίνει με αφετηρία τη σχετική συχνότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου.

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Α. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το Προγράμμα Σπουδών (Π.Σ.) του Λυκείου αποτελεί συνέχεια του Π.Σ.Γυμνασίου και επιδιώκει την επίτευξη των στόχων που έχουν διατυπωθεί στο ΕΠΠΣ για τα Μαθηματικά του Λυκείου.

Πιο συγκεκριμένα στο Λύκειο οι μαθηματικές γνώσεις των μαθητών θα πρέπει να εμπεδωθούν, να αναπτυχθούν και να επεκταθούν σε πιο θεωρητικό επίπεδο. Επιπλέον στο σχεδιασμό του Π.Σ. έχουν ληφθεί υπόψη η σύνδεση των μαθηματικών γνώσεων με τον πραγματικό κόσμο, η παρουσία των νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία, καθώς και η ενεργητική συμμετοχή των μαθητών κατά τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών εννοιών.

Το Π.Σ. του Λυκείου συντάχθηκε με βάση τις ίδιες αρχές που ισχύουν για το Π.Σ. του Γυμνασίου. Πιο συγκεκριμένα:

I.

Η διδασκαλία των Μαθηματικών οργανώνεται στη βάση της αρμονικής συνύπαρξης ενός σχεδιασμού κατάλληλων και πλούσιων δραστηριοτήτων και ενός προγραμματισμού μιας επιθυμητής τελικής συμπεριφοράς.

Με τον τρόπο αυτό το Π.Σ. αναπτύσσεται σε τρεις στήλες. Στην πρώτη στήλη αναγράφονται τα περιεχόμενα, δηλαδή οι μαθηματικές ενότητες που έχουν επιλεγεί για κάθε τάξη Λυκείου. Στη δεύτερη στήλη αναγράφονται οι επιθυμητοί στόχοι, ενώ στην Τρίτη δίνονται οδηγίες και αναφέρονται ενδεικτικά παραδείγματα προβλημάτων και δραστηριοτήτων, μέσω των οποίων οι στόχοι αυτοί θα υλοποιηθούν.

II.

Το Π.Σ. του Λυκείου περιέχει τις μαθηματικές ενότητες που διεθνώς θεωρούνται κατάλληλες για τις αντίστοιχες ηλικίες των μαθητών, με τη διδασκαλία των οποίων οι μαθητές θα αναπτύξουν τέτοιες δεξιότητες, ώστε να μπορούν:

1. Να ερμηνεύουν και να χρησιμοποιούν τα δεδομένα, τα σύμβολά και την ορολογία των Μαθηματικών.
2. Να οργανώνουν τα δεδομένα τους και να χρησιμοποιούν τις κατάλληλες προσεγγίσεις και εκτιμήσεις.
3. Να κατανοούν τις αριθμητικές, αλγεβρικές και γεωμετρικές (στο επίπεδο και στο χώρο) έννοιες και σχέσεις.
4. Να αναγνωρίζουν την κατάλληλη μαθηματική διαδικασία για τη διαπραγμάτευση μιας κατάστασης.
5. Να μεταφράζουν τα προβλήματα στη μαθηματική γλώσσα και να επιλέγουν και να εφαρμόζουν τις κατάλληλες τεχνικές και αλγορίθμους.
6. Να ανακαλούν από τη μνήμη τους και να κάνουν σωστή χρήση αλγοριθμικών διαδικασιών.
7. Να αναπτύσσουν επιχειρήματα και να κάνουν λογικές συνεπαγωγές.
8. Να εκφράζουν την επίλυση ενός προβλήματος με λογικό και σαφή τρόπο και να ερμηνεύουν τα συμπεράσματά τους.

9. Να επιλύουν προβλήματα που απαιτούν εκτεταμένη εργασία μέσα σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.
10. Να διαβάζουν και να κατανοούν μαθηματικά κείμενα.
11. Να κάνουν κριτική σε μαθηματικά επιχειρήματα.

III.

Οι προηγούμενες δεξιότητες, μπορούν να υλοποιηθούν με κατάλληλες δραστηριότητες. Προκειμένου να επιλεγεί η κατάλληλη δραστηριότητα, επισημαίνεται ότι:

1. Μια δραστηριότητα πρέπει:

- Να είναι κατανοητή από όλους τους μαθητές ώστε να μη δημιουργεί παρανοήσεις.
- Να αφήνει περιθώρια για έρευνα και αυτενέργεια.
- Να ενθαρρύνει την ομαδική εργασία, προτρέποντας τους μαθητές και τις ομάδες σε νοητικό ανταγωνισμό.
- Να επιτρέπει προσέγγιση σε μια ή περισσότερες από μια λύσεις.

2. Το πρόβλημα από το οποίο προκύπτει η δραστηριότητα πρέπει να είναι πλούσιο σε εμπλεκόμενες έννοιες, να είναι αρκετά σημαντικό αλλά όχι δύσκολο, ώστε να μπορέσει ο μαθητής να το λύσει.
3. Η επίλυση του προβλήματος πρέπει να μπορεί να γίνει (όπου είναι δυνατόν) σε διάφορα αναπαραστασιακά συστήματα, π.χ. σε αριθμητικο-αλγεβρικό, σε γραφικό σε γεωμετρικό κτλ., μεταξύ των οποίων ο μαθητής θα μπορέσει να κάνει τις κατάλληλες αντιστοιχίσεις και «μεταφράσεις» των εννοιών.

IV.

Η θέση της μαθηματικής απόδειξης στο Π.Σ. του Λυκείου αποτέλεσε αντικείμενο ιδιαίτερης προσοχής. Από τη μια μεριά μέσω των δραστηριοτήτων, οι μαθητές προσεγγίζουν διαισθητικά μια έννοια, αναπτύσσουν εικασίες και τέλος κατανοούν την αναγκαιότητα της απόδειξης. Από την άλλη, ιδιαίτερα στη Δευτέρα και Τρίτη Λυκείου και στις αντίστοιχες θετικές και τεχνολογικές κατευθύνσεις η μαθηματική απόδειξη έχει μια πιο τυπική μορφή, διατυπωμένη με όρους και συμβολισμούς που πλησιάζουν τις απαιτήσεις οι οποίες έχουν καθιερωθεί από τη μαθηματική κοινότητα.

V.

Τέλος κατά τη σύνταξη του Π.Σ. έγινε προσπάθεια:

1. Να αποφεύγονται οι επικαλύψεις και οι περιττές επαναλήψεις της ύλης από τάξη σε τάξη.
2. Η διδακτέα ύλη να περιορίζεται στα ουσιώδη, από επιστημονική και παιδαγωγική άποψη, ώστε οι μαθητές να μην έχουν περιττό φόρτο εργασίας.

3. Η διδακτέα ύλη να προσφέρεται με τέτοιο τρόπο, ώστε να βοηθάει πρώτα από όλα στην ανάπτυξη της κριτικής ικανότητας και της δημιουργικότητας του μαθητή.
4. Με τη διδακτέα ύλη να ευαισθητοποιείται ο μαθητής σε θέματα περιβαλλοντικής εκπαίδευσης, αγωγής υγείας, τεχνολογίας και άλλων επιστημών και σε ο,τιδήποτε άλλο τον προετοιμάζει για να ζήσει ως ενεργό μέλος μιας κοινωνίας ενταγμένης στην Ευρωπαϊκή Ένωση και στο σύγχρονο κόσμο γενικότερα.
5. Η διδακτέα ύλη να είναι προσαρμοσμένη στις νοητικές δυνατότητες, στις ανάγκες και στα ενδιαφέροντα των μαθητών για τους οποίους προορίζεται, και να μπορεί να διδαχτεί μα άνεση στο διαθέσιμο από το ωρολόγιο πρόγραμμα χρόνο για κάθε τάξη.

Β. Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά της

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. **Άλγεβρα** Ώρες: 2 την εβδομάδα

Περιεχόμενα	**Στόχοι**	**Οδηγίες**
1. ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΤΟ R		
Λογισμός στο R	Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν τις ιδιότητες της ισότητας και των πράξεων πρόσθεσης, πολλαπλασιασμού, αφαίρεσης και διαίρεσης.	Το περιεχόμενο αυτής της ενότητας, κατά το μεγαλύτερο μέρος του, οι μαθητές το έχουν διδαχθεί σε προηγούμενες τάξεις. Εδώ θα γίνει πιο συστηματική οργάνωση και παρουσίαση αυτών των εννοιών.
	Να γνωρίζουν τις ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο.	
	Να γνωρίζουν τις βασικές ταυτότητες.	Το ανάπτυγμα του $(a+\beta)^{\nu}$ για $\nu = 2,3$ είναι γνωστό. Εδώ θα γίνει επέκταση και για μεγαλύτερες τιμές του ν, με τη βοήθεια του τριγώνου του Πασκάλ και κατάλληλων δραστηριοτήτων.
	Να μπορούν να μετατρέπουν αλγεβρικές παραστάσεις σε γινόμενα.	
Η έννοια της απόδειξης	Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίσουν τη σημασία της απόδειξης στα Μαθηματικά.	Με κατάλληλα παραδείγματα, να γίνει αναφορά στην ευθεία και την πλάγια απόδειξη. Θα χρησιμοποιηθούν παραδείγματα και από τη Γεωμετρία. Με κατάλληλες δραστηριότητες, θα εξηγηθεί η σημασία των συνδέσμων «ή», «και», στα Μαθηματικά.
Εξισώσεις και συστήματα α΄ βαθμού	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: Να επιλύουν και να διερευνούν εξισώσεις α΄ βαθμού καθώς και γραμμικά συστήματα δυο εξι-	Η εισαγωγή θα γίνει με προβλήματα ώστε να γίνει κατανοητή η αναγκαιότητα της επίλυσης εξισώσεων και συστη-

	σώσεων με δυο αγνώστους με μία παράμετρο.	μάτων. Η επίλυση των εξισώσεων και συστημάτων είναι σκόπιμο να γίνει και γραφικά. Στην επίλυση συστημάτων θα χρησιμοποιηθούν οι μέθοδοι • των αντιθέτων συντελεστών • της αντικατάστασης και • των οριζουσών.
	Να επιλύουν συστήματα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους.	Στα συστήματα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους, θα παρουσιαστεί και η περί- πτωση του μερισμού ενός ποσού σε μέρη ανάλογα των αριθμών α,β,γ .
Διάταξη στο R	Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν και αποδει- κνύουν τις βασικές ιδιότητες των ανισοτήτων στο R. Να γνωρίζουν την έννοια της απόλυτης τιμής και να αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητες.	Οι ιδιότητες των ανισοτήτων θα χρησιμοποιηθούν στη επίλυση ανισώσεων της μορφής $ax+\beta>0$ και $ax+\beta<0$ αλλά και για την απόδειξη απλών ανισοτήτων. Ως παράδειγμα να αποδειχθεί και η ταυτοανισότητα $\frac{\alpha+\beta}{2}\geq\sqrt{\alpha\beta}$. Η απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού θα οριστεί ως η απόσταση δύο σημείων και θα αποδειχθούν οι βασικές ιδιότητές της: • $\|x\|\leq\theta \Leftrightarrow -\theta\leq x\leq\theta$ • $\|\alpha\cdot\beta\|=\|\alpha\|\cdot\|\beta\|$ • $\|\alpha+\beta\|\leq\|\alpha\|+\|\beta\|$. Η γραφική παράσταση συνάρτησης με απόλυτες τιμές, όπως για παράδειγμα της $f(x)=\|x-3\|$, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μοντέλο πραγματικών καταστάσεων (ανάκλαση μιας ακτίνας όταν προσπίπτει σε κάτοπτρο).
Ρίζες πραγματικών αριθμών	Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν και να χρησιμο	Η ν-στη ρίζα θα παρουσιαστεί ως η μη αρνητική λύση της

	ποιούν την έννοια της ν-στης ρίζας μη αρνητικού πραγματικού αριθμού και να αποδεικνύουν τις βασικές της ιδιότητες. Να γνωρίζουν την έννοια της δύναμης με ρητό εκθέτη και να τη χρησιμοποιούν στη διαπραγμάτευση αλγεβρικών παραστάσεων με ριζικά.	εξίσωσης $x^{\nu} = \alpha, \alpha \geq 0$. Θα τονιστεί ότι $\sqrt{\alpha^2} = \lvert\alpha\rvert$ και $\alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} < \sqrt{\beta}$.
Επίλυση προβλήματος	Οι μαθητές πρέπει: Να αναπτύξουν εκείνες τις ικανότητες που θα τους επιτρέψουν να οργανώνουν και να χρησιμοποιούν τις γνώσεις τους στην επίλυση προβλημάτων.	Τα προβλήματα που θα χρησιμοποιηθούν στην ενότητα αυτή θα πρέπει να είναι τόσο καθαρά μαθηματικά όσο και πραγματικά. Η ενότητα θα διδαχθεί με δραστηριότητες και εργασίες και σκοπεύει στην εξοικείωση με μεθόδους και στρατηγικές λύσης προβλήματος, όπως: • Λύσε ένα απλούστερο πρόβλημα, ένα πρόβλημα με λιγότερες μεταβλητές. • Εξέτασε μερικές περιπτώσεις. • Κατασκεύασε έναν πίνακα τιμών και ερεύνησε για τρόπους «συμπεριφοράς» (μοντέλα) των αριθμών. • Σχεδίασε ένα διάγραμμα ή μια γραφική παράσταση. • Διατύπωσε ενδιάμεσα βήματα, υποσκοπούς, προκειμένου να λύσεις το πρόβλημα, κτλ. Στην ίδια ενότητα μπορούν να συμπεριληφθούν και προβλήματα μεγίστου και ελαχίστου, όπως για παράδειγμα: • Να βρεθεί το ορθογώνιο με σταθερή περίμετρο και μέγιστο εμβαδόν. • Να βρεθεί το ορθογώνιο με σταθερό εμβαδόν και ελάχιστη περίμετρο. (Τα ίδια προβλήματα μπορούν

		να μελετηθούν και στην ενότητα των συναρτήσεων).
		• Οι μαθητές να εξοικειωθούν με τον υπολογιστή τσέπης με επιστημονικό πρόγραμμα. Η χρήση του υπολογιστή τσέπης με γραφικά και του ηλεκτρονικού υπολογιστή, όπου είναι δυνατόν, μπορεί να συμβάλλει στην επιτυχία των στόχων της διδασκαλίας.
2. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ		
Η έννοια της συνάρτησης	Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν την έννοια του συνόλου, να συμβολίζουν και να κάνουν πράξεις με σύνολα.	• Η παράσταση ενός συνόλου θα γίνει με περιγραφή μιας χαρακτηριστικής ιδιότητας των στοιχείων του, με αναγραφή των στοιχείων του και με διαγράμματα του Venn. • Θα διδαχθούν η ένωση, η τομή, η διαφορά δύο συνόλων καθώς και το συμπλήρωμα ενός συνόλου.
	Να γνωρίζουν την έννοια της συνάρτησης και να μπορούν να τη συμβολίζουν.	• Θα οριστεί το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης και θα χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $y = f(x)$. Η αναφορά στα σύνολα δεν είναι αυτοσκοπός αλλά θα βοηθήσει στον ακριβέστερο ορισμό άλλων εννοιών όπως, για παράδειγμα, η συνάρτηση, οι πράξεις με ενδεχόμενα κτλ.
Εξίσωση γραμμής	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: Να καθορίζουν τη θέση σημείου στο επίπεδο.	• Θα δοθούν μόνο οι εξισώσεις της ευθείας και του κύκλου.
	Να εκφράζουν την ευθεία και τον κύκλο με τις αντίστοιχες εξισώσεις.	• Μπορεί να δοθεί ως δραστηριότητα ο προσδιορισμός των κοινών σημείων, γραφικά και αλγεβρικά, κύκλου και ευθείας.

	Να αναγνωρίζουν πότε δύο ευθείες είναι παράλληλες ή κάθετες.	• Θα ερμηνευθεί ο ρόλος των παραμέτρων a, β στην εξίσωση της ευθείας $y = ax + \beta$ και θα αναφερθούν παραδείγματα στα οποία οι μεταβλητές συνδέονται γραμμικά.
Μελέτη απλών συναρτήσεων	Οι μαθητές πρέπει: Να προσδιορίζουν τα διαστήματα μονοτονίας, και τα ακρότατά μιας συνάρτησης. Να κατανοήσουν την έννοια της άρτιας και περιττής συνάρτησης.	Θα γίνει μελέτη και γραφική παράσταση των συναρτήσεων: $y = \alpha x + \beta$, $y = \alpha x^2$, $y = \frac{\alpha}{x}$, $y = \alpha x^3$, $y = \|x\|$, $y = \sqrt{x}$, $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $y = \alpha x^2 + \beta\|x\| + \gamma$, $y = \|\alpha x^2 + \beta x + \gamma\|$. Θα εξεταστεί η συμπεριφορά των συναρτήσεων για πολύ μικρές και πολύ μεγάλες τιμές του $\|x\|$. Η μελέτη της $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ θα γίνει με το μετασχηματισμό της στη μορφή $y = \alpha(x-\kappa)^2 + \lambda$.
Εννοια του ρυθμού μεταβολής. Φυσική σημασία.		Για τη μελέτη των συναρτήσεων να χρησιμοποιηθεί και ο λόγος μεταβολής μιας συνάρτησης και θα γίνει μια πρώτη αναφορά στην έννοια του ρυθμού μεταβολής. Ο ρυθμός μεταβολής θα εισαχθεί με πρόβλημα στο οποίο θα προκύπτει η αναγκαιότητα να υπολογιστεί η οριακή τιμή του λόγου μεταβολής σε ένα σημείο. Δε θα αναφερθεί η έννοια του ορίου, αλλά θα χρησιμοποιηθεί με διαισθητικό τρόπο. Θα υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής σε σημεία του πεδίου ορισμού διάφορων απλών συναρτήσεων όπως για παράδειγ-

		μα [illegible]: $y=\sqrt{x}$, $y=ax+\beta$, $y=ax^2$.
3. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ-ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ Β΄ΒΑΘΜΟΥ		
Η εξίσωση $a\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: Να επιλύουν την εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$ Να επιλύουν εξισώσεις και συστήματα που η λύση τους ανάγεται στην επίλυση εξισώσεων $2^{ου}$ βαθμού.	• Η αλγεβρική επίλυση της $a\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ θα γίνει με τη συμπλήρωση τετραγώνου. • Θα βρεθούν οι ρίζες της $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$ και θα εκφραστεί το γινόμενο και το άθροισμά τους συναρτήσει των a,β,γ. • Η γραφική επίλυση της $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$ θα προκύψει με αφορμή τον προσδιορισμό των σημείων τομής της $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με τον άξονα $x'x$. • Τα συστήματα $2^{ου}$ βαθμού θα επιλύονται και θα ερμηνεύονται και γραφικά, όπου είναι δυνατόν. • Θα γραφεί σχόλιο για την περίπτωση Δ<0, όπου θα αναφέρεται ότι και στην περίπτωση αυτή, η εξίσωση έχει λύση αλλά μέσα σε ένα «διευρυμένο» σύνολο, το οποίο ονομάζουμε σύνολο των μιγαδικών αριθμών.
Ανισώσεις $2^{ου}$ και ανωτέρου βαθμού.	Οι μαθητές πρέπει: Να μπορούν να προσδιορίζουν το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Να επιλύουν τις ανισώσεις	• Ο προσδιορισμός του προσήμου να γίνει γραφικά. Ως δραστηριότητα, μπορεί να δοθεί η αλγεβρική δια πραγμάτευση του θέματος.

	$\alpha x^2+\beta x+\gamma>0$, $\alpha x^2+\beta x+\gamma<0$. Να επιλύουν ανισώσεις της μορφής $A(x)\cdot B(x)\cdot\ldots\Phi(x)\geq 0$. Να επιλύουν ανισώσεις της μορφής: $\frac{A(x)}{B(x)}>0$ ή $\frac{A(x)}{B(x)}<0$	
4. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ	Οι μαθητές πρέπει: Να μπορούν να ορίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς με τη βοήθεια του τριγωνο μετρικού κύκλου. Να αποδεικνύουν τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες. Να κατανοήσουν ότι κάθε αριθμός του διαστήματος $[-1, 1]$, μπορεί να εκφραστεί ως τιμή του ημιτόνου ή συνημι-τόνου μιας γωνίας.	• Ο ορισμός των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας ή τόξου θα γίνει με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου. Στη συνέχεια θα υπολογισθούν οι σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών ενός τόξου, και η σχέση μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών αντιθέτων, συμπληρωματικών και παραπληρωματικών τόξων. Θα τονιστεί ότι οι τριγωνομετρικές ταυτότητες, είναι ταυτότητες υπό τη συνθήκη των βασικών τριγωνομετρικών σχέσεων

2. Γεωμετρία Ώρες: 3 την εβδομάδα μέχρι 20 Ιανουαρίου και
2 από την 21 Ιανουαρίου έως το τέλος του έτους.

Περιεχόμενα	Στόχοι	Οδηγίες
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ		
Τα βασικά γεωμετρικά σχήματα Οι αρχικές γεωμετρικές έννοιες : σημείο, ευθεία, επίπεδο.	Οι μαθητές πρέπει: Να εμπεδώσουν και να συστηματοποιήσουν τις γνώσεις τους σχετικά με τις αρχικές έννοιες: σημείο, ευθεία, επίπεδο και τα βασικά γεωμετρικά σχήματα: ευθύγραμμο τμήμα, γωνία, κύκλος, επίπεδο ευθύγραμμο σχήμα.	Η εισαγωγή στη Ευκλείδεια Γεωμετρία θα είναι σύντομη και θα αναφέρεται : • Στο αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. • Στη διαφοροποίηση της από την πρακτική Γεωμετρία. • Σε μια σύντομη ιστορική αναδρομή στη γέννηση και ανάπτυξή της.
	Να γνωρίζουν τον τρόπο θεμελίωσης και ανάπτυξης της Γεωμετρίας. Να μυηθούν στην έννοια της απόδειξης.	Τις έννοιες "σημείο" , "ευθεία", "επίπεδο" που προκύπτουν άμεσα από την εμπειρία μας τις δεχόμαστε ως αρχικές χωρίς περαιτέρω διευκρινίσεις. Όμως οι έννοιες αυτές υπόκεινται στις παρακάτω παραδοχές: • Από δύο σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία. • Για κάθε ευθεία υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του επιπέδου που δεν ανήκει σ' αυτή. • Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα και προς τις δύο κατευθύνσεις χωρίς διακοπές και κενά. Ισχυρισμοί όπως οι παραπάνω , που τους δεχόμαστε ως αληθείς χωρίς απόδειξη και χρησιμοποιούνται για εξαγωγή συμπερασμάτων, ονομάζονται **αξιώματα**

2. ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟ ΤΜΗΜΑ		
Ημιευθεία - ευθύγραμμο τμήμα		Τα διάφορα γεωμετρικά σχήματα ορίζονται όπως στις προηγούμενες τάξεις.
Σύγκριση τμημάτων- πράξεις μεταξύ τμημάτων		Η σύγκριση των γεωμετρικών σχημάτων θα γίνει με την διαδικασία της μετατόπισης και της σύμπτωσης όπως στις προηγούμενες τάξεις.
Μήκος ευθυγραμμου τμήματος - απόσταση σημείων		
Σημεία συμμετρικά ως προς κέντρο.		Κατά την μετατόπιση δεχόμαστε ότι τα σχήματα παραμένουν **αναλλοίωτα** ως προς τη μορφή και το μέγεθος.
		Θα γίνει η κατασκευή ευθ. τμήματος ίσου προς δοθέν με τη χρήση του κανόνα και του διαβήτη.
		Δεχόμαστε χωρίς απόδειξη ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα (ή απλούστερα τμήμα) έχει μόνο ένα μέσο.
		Τα άκρα ενός τμήματος είναι συμμετρικά ως προς το μέσο του.
		Οι πράξεις με τμήματα, πρόσθεση και πολλαπλασιασμός με φυσικό αριθμό, ορίζονται όπως στις προηγούμενες τάξεις, χωρίς αναφορά στη μέτρηση και ερμηνεύονται κατασκευαστικά. Το ίδιο θα ισχύει για την γωνία και το τόξο.
3. ΓΩΝΙΕΣ		
Η έννοια του ημιεπιπέδου		Ως γωνία εννοούμε το σχήμα που ορίζεται από δύο ημιευθείες με κοινή αρχή.
Η έννοια της γωνίας- μηδενική, ευθεία, πλήρης		Εσωτερικό γωνίας είναι η τομή

γωνία. Σύγκριση γωνιών διχοτόμος γωνίας -ορθή , οξεία , αμβλεία γωνία. Κάθετες ευθείες- ευθεία κάθετη από σημείο σε ευθεία- μεσοκάθετη-σημεία συμμετρικά ως προς άξονα. Πράξεις με γωνίες - εφεξής γωνίες - κατακορυφήν γωνίες - παραπληρωματικές, συμπληρωματικές γωνίες.		των δύο ημιεπιπέδων που καθορίζονται από τις πλευρές της. Δεχόμαστε ότι η διχοτόμος γωνίας είναι μοναδική. Η ορθή γωνία θα οριστεί ως το μισό της ευθείας γωνίας. Δύο ευθείες λέγονται κάθετες, όταν σχηματίζουν ορθή γωνία. Η μοναδικότητα της κάθετης από σημείο σε ευθεία θα εξεταστεί στις περιπτώσεις που το σημείο βρίσκεται i) επί της ευθείας ii) εκτός της ευθείας. Στην πρώτη περίπτωση θα εξηγηθεί με τη μοναδικότητα της διχοτόμου μιας ευθείας γωνίας και στη δεύτερη περίπτωση με τη βοήθεια της δίπλωσης του επιπέδου περί την ευθεία. Η απόδειξη θα δοθεί στη συνέχεια μετά τα κριτήρια ισότητας τριγώνων. Τα άκρα ενός τμήματος είναι συμμετρικά ως προς τη μεσοκάθετο. Θα αποδειχτούν οι προτάσεις: -Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες. -Οι διχοτόμοι δύο κατακορυφήν γωνιών είναι αντικείμενες ημιευθείες. -Δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες έχουν τις μη κοινές πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες και αντιστρόφως. -Οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες. Προτάσεις όπως οι προηγούμενες ονομάζονται **θεωρήματα**

		Με την ευκαιρία των παραπάνω προτάσεων θα γίνει εισαγωγή στην ευθεία απόδειξη, στη μέθοδο " **της εις άτοπον απαγωγής**", καθώς και στην έννοια του αντίστροφου θεωρήματος.
4. ΚΥΚΛΟΣ		
Η έννοια του κύκλου-στοιχεία κύκλου. Θέση σημείου ως προ κύκλο. Επίκεντρη γωνία - σχέση επίκεντρης γωνίας και του αντίστοιχου τόξου. Μέτρο τόξου, μέτρο γωνίας.		Δεχόμαστε ότι ο κύκλος είναι μια κλειστή γραμμή χωρίς διακοπές και κενά. Η σχέση της επίκεντρης με το αντίστοιχό της τόξο θα εξηγηθεί με τη μέθοδο της μετατόπισης και σύμπτωσης. Θα αποδειχτεί ότι κάθε τόξο έχει μόνο ένα μέσο. Θα γίνει η κατασκευή με κανόνα και διαβήτη γωνίας ίσης προς δοθείσα και τόξου ίσου προς δοθέν. Ως μέτρο γωνίας θα οριστεί το μέτρο του αντίστοιχου τόξου. Με αφορμή τον ορισμό του κύκλου είναι σκόπιμο να γίνει μια πρώτη αναφορά στην έννοια του γεωμετρικού τόπου.
5. ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ		
Τεθλασμένη γραμμή Πολύγωνο Στοιχεία πολυγώνου		Θα οριστούν οι έννοιες - Κυρτή, μη κυρτή τεθλασμένη γραμμή. -Κυρτό, μη κυρτό πολύγωνο, εσωτερικό κυρτού πολυγώνου
6. ΤΡΙΓΩΝΑ		
Σύγκριση τριγώνων • Είδη τριγώνων • Στοιχεία τριγώνου • Κριτήρια ισότητας • Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου	Οι μαθητές πρέπει Να γνωρίζουν τα είδη των τριγώνων ως προς τις πλευρές και τις γωνίες τους. Να μπορούν να αποφαίνονται	Ως πρώτο κριτήριο ισότητας τριγώνων θα αναφερθεί η περίπτωση που δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (Π-Γ-Π). Η ισότητα των τριγώνων στην

• Ύπαρξη και μοναδικότητα κάθετης από σημείο σε ευθεία. • Ιδιότητες τόξων και αντίστοιχων χορδών σε έναν κύκλο ή σε ίσους κύκλους.	πότε δύο τρίγωνα είναι ίσα και να διαπιστώνουν ότι σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες κείνται ίσες πλευρές και αντιστρόφως	περίπτωση αυτή θα εξηγηθεί με την διαδικασία της μετατόπισης και σύμπτωσης όπως και στα "Στοιχεία". Οι άλλες δύο περιπτώσεις ισότητας τριγώνων Γ-Π-Γ και Π-Π-Π θα αποδειχτούν. Το τρίτο κριτήριο Π-Π-Π θα αποδειχθεί μόνο για οξυγώνια τρίγωνα. Οι άλλες δύο περιπτώσεις θα δοθούν ως δραστηριότητες. Θα επισημανθεί ότι τα κριτήρια ισότητας τριγώνων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αποδειχτεί: -Η ισότητα δύο τμημάτων. -Η ισότητα δύο γωνιών. Αμέσως μετά το κάθε κριτήριο θα αναφερθούν ως θεωρήματα ή πορίσματα οι βασικές ιδιότητες των ισοσκελών τριγώνων, καθώς και των τόξων και χορδών, που η απόδειξή τους στηρίζεται στο συγκεκριμένο κριτήριο. Για παράδειγμα, ως συνέπεια του κριτηρίου Π-Γ-Π μπορούν να αναφερθούν οι προτάσεις: • Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι παρά τη βάση γωνίες του είναι ίσες. • Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής ισοσκελούς τριγώνου είναι ύψος και διάμεσος. Κάθε σημείο της μεσοκάθετης ενός τμήματος απέχει εξίσου από τα άκρα του
	Να μπορούν να αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητες των τόξων και των αντίστοιχων χορδών.	• Σε ίσα τόξα ενός κύκλου ή ίσων κύκλων αντιστοιχούν ίσες χορδές. • Επίσης ως συνέπειες του κριτηρίου Π-Π-Π μπορούν να αναφερθούν οι προτάσεις: • Σε ίσες χορδές ενός κύκλου ή ίσων κύκλων αντιστοιχούν ίσα τόξα.
	Να μπορούν να αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητες του	• Η διάμεσος ενός ισοσκελούς τριγώνου που άγεται από την κορυφή του

	ισοσκελούς τριγώνου.	είναι ύψος και διχοτόμος. • Επισημαίνουμε ότι σε κάθε περίπτωση θα αναφέρονται ως θεωρία εκείνες οι προτάσεις που είναι εντελώς απαραίτητες για την "παραγωγή" της θεωρίας που θα ακολουθήσει
	Να μπορούν να αποφαίνονται πότε δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα και να αναγνωρίζουν την ιδιαιτερότητα της εφαρμογής των κριτηρίων ισότητας στα ορθογώνια τρίγωνα.	• Θα αποδειχτεί ότι δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν: – Την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντιστοίχως ίσες μία προς μία. – Την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντιστοίχως ίσες μία προς μία. Συνεπώς δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν: i. Δύο οποιεσδήποτε πλευρές ίσες μία προς μία ii. Μία πλευρά και την προσκείμενη σ' αυτήν οξεία γωνία αντιστοίχως ίσες μία προς μία. Η γενικότερη περίπτωση ισότητας δύο ορθογώνιων τριγώνων - μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντιστοίχως ίσες μία προς μία - θα αποδειχτεί μετά την εισαγωγή της έννοιας της παραλληλίας Ως άμεσες συνέπειες των κριτηρίων μπορούν να αναφερθούν οι προτάσεις: -Κάθε σημείο που απέχει εξίσου από τα άκρα τμήματος βρίσκεται στη μεσοκάθετό του. Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας απέχει εξίσου από τις πλευρές της και αντιστρόφως. -Το κέντρο κύκλου απέχει εξίσου από ίσες χορδές και αντιστρόφως.

7.ΒΑΣΙΚΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ		
Ο κύκλος Η μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος Η διχοτόμος γωνίας.	Να κατανοήσουν την έννοια του γεωμετρικού τόπου και τη διαδικασία εύρεσης ενός τόπου.	Κατά την διαδικασία εύρεσης του Γεωμετρικού τόπου αναζητώνται όλα τα σημεία του και αποδεικνύεται ότι είναι μόνο αυτά. Μέ κατάλληλες δραστηριότητες και με τη βοήθεια των γεωμετρικών τόπων οι μαθητές θα βρουν και θα κατασκευάσουν το σημείο που ισαπέχει – από τρία σημεία – από τις πλευρές ενός τριγώνου.
8. ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ		
Σχήματα συμμετρικά ως προς κέντρο και άξονα. Αξονική και κεντρική συμμετρία	Να εμπεδώσουν τις βασικές έννοιες της κεντρικής και αξονικής συμμετρίας και να μπορούν να αναγνωρίζουν την παρουσία της.	Θα γίνει επανάληψη των βασικών εννοιών της αξονικής και κεντρικής συμμετρίας που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο. Στο εξής θα επισημαίνονται σχήματα με άξονα ή κέντρο συμμετρίας.
9. ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ		
Σχέσεις εξωτερικής και απέναντι εσωτερικής γωνίας. Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών τριγώνου.	Να μπορούν να αποδεικνύουν τις βασικές ανισοτικές σχέσεις σε τρίγωνο.	Θα αποδειχτούν: -Κάθε εξωτερική γωνία είναι μεγαλύτερη από κάθε απέναντί της εσωτερική. -Η ανισοτική σχέση πλευρών και γωνιών τριγώνου -Η τριγωνική ανισότητα.
Τριγωνική ανισότητα. Κάθετες και πλάγιες ευθείες.	Να μπορούν να αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητες των πλαγίων τμημάτων που άγονται από σημείο εκτός ευθείας προς αυτή.	Ως συνέπεια των προηγούμενων προτάσεων προκύπτει ότι κάθε τμήμα είναι μικρότερο από κάθε γραμμή με τα ίδια άκρα. Θα αποδειχτεί ότι: -Τα ίχνη δύο ίσων πλαγίων τμημάτων που άγονται από το

		ίδιο σημείο ισαπέχουν από το ίχνος της κάθετης που άγεται από το ίδιο σημείο και αντιστρόφως. -Τα ίχνη δύο άνισων πλαγίων τμημάτων που άγονται από το ίδιο σημείο ισαπέχουν ομοίως άνισα από το ίχνος της κάθετης Με δραστηριότητες οι μαθητές θα ασχοληθούν με προβλήματα ελαχίστου δρόμου
10. ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ Τέμνουσα ,εφαπτομένη, ίσα εφαπτόμενα τμήματα προς κύκλο	Να γνωρίζουν πότε μια ευθεία τέμνει εφάπτεται ή δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο. Να μπορούν να αποδεικνύουν ότι τα εφαπτόμενα τμήμα- τα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου είναι ίσα	Θα εξηγηθεί ότι όταν η απόσταση του κέντρου του κύκλου από μια ευθεία είναι: μεγαλύτερη από την ακτίνα, η ευθεία δεν έχει κοινό σημείο με τον κύκλο. Ιση με την ακτίνα, η ευθεία έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο. - μικρότερη από την ακτίνα, η ευθεία έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο. Θα αποδειχτεί με τη βοήθεια της εις άτοπον απαγωγής ότι δεν μπορεί μια ευθεία να έχει περισσότερα από δύο κοινά σημεία με τον κύκλο.
11.ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ Τεμνόμενοι και εφαπτόμενοι κύκλοι.	Να γνωρίζουν τις σχετικές θέσεις δύο κύκλων και τη σχέση που έχει η διάκεντρος με το άθροισμα και τη διαφορά των ακτινών. Να μπορούν να αποδεικνύουν ότι: -Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους. -Το σημείο επαφής δύο εφαπτόμενων κύκλων βρίσκεται στη διάκεντρο.	Οι σχέσεις μεταξύ της διακέντρου και των ακτίνων δύο κύκλων θα διαπιστωθούν εποπτικά. Θα τονιστεί ότι σε δύο ίσους και τεμνόμενους κύκλους η κοινή χορδή είναι μεσοκάθετος στη διάκεντρο.

12. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ		
Γωνίας ίσης με δοθείσα Μεσοκάθετης τμήματος Κάθετης από σημείο σε ευθεία Διχοτόμου γωνίας Τριγώνου.	Να κατανοήσουν την έννοια της γεωμετρικής κατασκευής με κανόνα και διαβήτη. Να μπορούν να κατασκευάζουν τις αναφερόμενες γεωμετρικές κατασκευές με κανόνα και διαβήτη	Θα επισημανθεί η αξία της κατασκευής με κανόνα και διαβήτη και θα αναφερθούν ιστορικά στοιχεία σχετικά με τη μέθοδο αυτή. Θα γίνει η κατασκευή τριγώνου όταν δίνονται - Οι τρεις πλευρές του. -Οι δύο πλευρές και η περιεχόμενη σ' αυτές γωνία του. -Η μία πλευρά και οι προσκείμενες σ' αυτή γωνίες του και θα σχολιαστεί η μοναδικότητα των κατασκευών.
13. ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ		
• Ορισμός		
Γωνίες δύο ευθειών που τέμνονται από τρίτη. Θεώρημα ύπαρξης παραλλήλων. Αίτημα παραλληλίας. Το 5ο αίτημα των Στοιχείων του Ευκλείδη	Να μπορούν να αποδεικνύουν ότι αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες. Να γνωρίζουν ότι απαιτούμε πως από ένα σημείο εκτός ευθείας άγεται μία μόνο παράλληλη προς αυτή.	Θα αποδειχθεί ως πόρισμα ότι δύο ευθείες κάθετες σε τρίτη είναι μεταξύ τους παράλληλες. Με την πρόταση αυτή κατοχυρώνεται η ύπαρξη μιας τουλάχιστον παράλληλης από σημείο σε ευθεία.
Ιδιότητες παράλληλων ευθειών. Κατασκευή παράλληλης ευθείας. Γωνίες με πλευρές παράλληλες ή κάθετες. Άθροισμα γωνιών τριγώνου και κυρτού πολυγώνου	Να μπορούν να αποδεικνύουν με την βοήθεια της μοναδικότητας της παράλληλης ότι: - Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη , σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. - Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες προς τρίτη , είναι και μεταξύ τους παράλληλες. - Αν μια ευθεία τέμνει τη μία από δύο παράλληλες, θα τέμνει και την άλλη	Ως πορίσματα θα αναφερθούν οι προτάσεις : - Αν δυο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες ή τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές, τότε είναι παράλληλες. - Δύο παράλληλες ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες και τις εντός και επί τα

	Να μπορούν να αποδεικνύουν ότι "Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από 180^{o}, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες". Να μπορούν να κατασκευάζουν μια ευθεία παράλληλη προς δοθείσα από δοθέν σημείο , με τη βοήθεια του κανόνα και του διαβήτη Να μπορούν να αποδεικνύουν τη σχέση που έχουν δύο γωνίες με πλευρές αντιστοίχως παράλληλες ή αντιστοίχως κάθετες.	αυτά μέρη παραπληρωματικές. Θα γίνει σύντομη ιστορική αναφορά στο 5^{o} αίτημα των Στοιχείων του Ευκλείδη και θα τονιστεί η ισοδυναμία του με το αξίωμα παραλληλίας. Η κατασκευή της παράλληλης θα στηριχτεί στην ιδιότητα των εντός εναλλάξ γωνιών
	Να μπορούν να αποδεικνύουν ότι το άθροισμα -Των εσωτερικών γωνιών τριγώνου είναι 2 ορθές -Των εσωτερικών γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι 2ν-4 ορθές. -Των εξωτερικών γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι 4 ορθές	Θα αναφερθούν ως πορίσματα οι προτάσεις: - Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών. - Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες ,έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες. - Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο οι οξείες γωνίες του είναι συμπληρωματικές. Θα αποδειχθεί ότι δύο ορθογώνια τρίγωνα με μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντιστοίχως ίσες μία προς μία είναι ίσα. Θα επισημανθεί με την βοήθεια δραστηριότητας ότι η ιδιότητα των εξωτερικών γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου είναι μια "αναλλοίωτη" για τα κυρτά πολύγωνα του επιπέδου. Θα γίνει σχολιασμός του $5^{ου}$ αιτήματος.

14 ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ		
Βασικές ιδιότητες μεταξύ των πλευρών των γωνιών και των διαγωνίων παραλληλογράμμου	Να μπορούν να αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητες των παραλληλογράμων.	Θα αποδειχτούν οι προτάσεις για τις απέναντι πλευρές τις διαγώνιες και τις απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου, καθώς και οι αντίστροφες αυτών.
Βασικές ιδιότητες : ορθογωνίου, ρόμβου και τετραγώνου.	Να διακρίνουν τα είδη των παραλληλογράμμων και να μπορούν να αποδεικνύουν τις χαρακτηριστικές ιδιότητες του ορθογωνίου του ρόμβου και του τετραγώνου	Θα αποδειχτούν οι επί πλέον ιδιότητες του ορθογωνίου, του ρόμβου και του τετραγώνου καθώς και οι αντίστροφες προτάσεις ως κριτήρια. Σε σύντομο σημείωμα θα αναφερθεί η ταξινόμηση των τετραπλεύρων ως προς την παραλληλία των πλευρών τους. Θα αναφερθούν ως πορίσματα οι προτάσεις:
Του τμήματος που συνδέει τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου. Της διαμέσου ορθογωνίου τριγώνου.	Να μπορούν να αποδεικνύουν ότι: - Το τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της. - Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που άγεται από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας και αντιστρόφως. - Αν παράλληλες ευθείες ορίζουν σε ευθεία ίσα τμήματα θα ορίζουν επίσης ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.	-Κάθε ευθεία παράλληλη προς μία άλλη πλευρά τριγώνου η οποία άγεται από το μέσο μιας πλευράς του θα διέρχεται και από το μέσο της τρίτης πλευράς. -Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του είναι 30° τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας και αντιστρόφως. Θα εξεταστεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο ευθείες που είναι παράλληλες ή τέμνονται.
15. ΤΡΑΠΕΖΙΟ Ορισμός ,βασικές ιδιότητες	Να μπορούν να αποδεικνύουν ότι: - Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμα αυτών. - Οι γωνίες της βάσης ισοσκελούς τραπεζίου είναι ίσες και αντιστρόφως	Θα αναφερθεί ως πόρισμα ότι η διάμεσος τραπεζίου διέρχεται από τα μέσα των διαγωνίων.
Αξιοσημείωτες ευθείες στο	Να μπορούν ν' αποδεικνύουν	Θ' αναφερθεί ότι :

τρίγωνο	ότι σε ένα τρίγωνο:	
Σημείο τομήςμεσοκαθέτων, διχοτόμων και υψών ενός τριγώνου	Οι μεσοκάθετοι των πλευρών του, οι διχοτόμοι των γωνιών του , οι διάμεσοι και τα ύψη του αποτελούν τριάδες συντρεχουσών ευθειών	-Το σημείο τομής των μεσοκαθέτων είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου (περίκεντρο). -Το σημείο τομής των διχοτόμων είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου (έκκεντρο). -Το σημείο τομής των διαμέσων (κέντρο βάρους) έχει την ιδιότητα να χωρίζει κάθε διάμεσο σε δύο τμήματα που το ένα είναι διπλάσιο του άλλου.
16. ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ		
Ορισμός εγγεγραμμένης γωνίας σχέση εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης. Γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης. Βασικοί γεωμετρικοί τόποι στο κύκλο.	Να μπορούν να αποδεικνύουν ότι η εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης. Να μπορούν να αποδεικνύουν ότι η γωνία που σχηματίζεται από μια χορδή και την εφαπτομένη στο άκρο της χορδής ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής. Να μπορούν να βρίσκουν και να κατασκευάζουν το γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου από τα οποία δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα φαίνεται υπό ορισμένη γωνία.	Θα αποδειχθεί η σχέση μεταξύ εγγεγραμμένης και επίκεντρης και στις τρεις περιπτώσεις που το κέντρο του κύκλου βρίσκεται εντός ή εκτός της γωνίας ή σε μία από τις πλευρές της. Θα αναφερθεί η σχέση μεταξύ των μετρων μιας εγγεγραμμένης και του αντίστοιχου τόξου της. Ο γ. τ. θα διδαχθεί αναλυτικά και θα τονιστούν: - Η διαδικασία εύρεσης του γ.τ. - Η κατασκευή και η διερεύνησή του
17. ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΚΑΙ ΕΓΓΡΑΨΙΜΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ Ορισμός , χαρακτηριστικές ιδιότητες.	Να μπορούν να αποδεικνύουν ότι κάθε εγγεγραμμένο τετράπλευρο : - Έχει τις απέναντι γωνίες του παραπληρωματικές. - Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες και αντιστρόφως. Να μπορούν να αποφαίνονται πότε ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο	Ως πόρισμα θα αναφερθεί η πρόταση : Σε κάθε εγγεγραμμένο τετράπλευρο κάθε γωνία του είναι ίση με την εξωτερική της απέναντι γωνίας. Με δραστηριότητες θα εξεταστεί η ύπαρξη κύκλου που διέρχεται από 2, 3 και 4 σημεία και η μοναδικότητά του.

18.ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ - ΓΕΩΜΕΤΡΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ	Να μπορούν να χρησιμοποιούν τους απλούς γεωμετρικούς τόπους στις γεωμετρικές κατασκευές. Να μπορούν να κατασκευάζουν : - Ορθογώνιο τρίγωνο όταν γνωρίζουν μία κάθετη πλευρά και την υποτείνουσα. - Την εφαπτομένη κύκλου από σημείο εκτός αυτού. - Την κοινή εφαπτομένη δύο κύκλων.	Θα τονιστεί η χρησιμότητα των γεωμετρικών τόπων στις κατασκευές. Ως παράδειγμα γεωμετρικής κατασκευής με τη βοήθεια των γεωμετρικών τόπων θα γίνει η κατασκευή τριγώνου ΑΒΓ από τα στοιχεία του α, $υ_α$ και $\hat{A} = \hat{φ}$. • Μέ δραστηριότητες θα ζητηθεί από τους μαθητές να βρουν τον γ. τόπο των μέσων των χορδών όταν αυτές – συντρέχουν σε ένα σημείο, – είναι παράλληλες, – ισαπέχουν από το κέντρο. • Με την ευκαιρία των γεωμετρικών κατασκευών θα γίνει αναφορά στην αναλυτική και συνθετική μέθοδο, στη Γεωμετρία και στα Μαθηματικά γενικότερα
19. ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΛΟΓΟΥ Γινόμενο τμήματος με αριθμό. Λόγος δυο τμημάτων. Αναλογίες , Ιδιότητες αναλογιών. Μήκος τμήματος. Διαίρεση τμημάτων εσωτερικά και εξωτερικά ως προς δοθέντα λόγο.	Να γνωρίζουν την έννοια του λόγου δύο τμημάτων Να κατανοήσουν την έννοια του μήκους τμήματος. Να γνωρίζουν την έννοια των αναλόγων τμημάτων	Με δεδομένο τμήμα α θα γίνουν οι κατασκευές των τμημάτων - 2α,3α,4α,..να, ν∈N $\frac{1}{2}α, \frac{1}{3}α, \ldots \frac{μ}{ν}α, μ \in N, ν \in N^*$. και θα αναφερθεί ότι αποδεικνύεται η ύπαρξη των τμημάτων κα με κ άρρητο αριθμό. Η κατασκευή μερικών από τα τμήματα αυτά θα γίνει στη συνέχεια. Μήκος ενός τμήματος α είναι ο λόγος του α ως προς ένα άλλο τμήμα ' που λαμβάνεται ως μονάδα μέτρησης. Ως άμεσες συνέπειες του ορισμού του μήκους προκύπτουν οι προτάσεις:

		-Ο λόγος δύο τμημάτων ισούται με τον λόγο των μηκών τους, όταν μετρούνται με την ίδια μονάδα μέτρησης και είναι ανεξάρτητος από τη επιλογή της μονάδας μέτρησης. - Δύο ίσα τμήματα έχουν ίσα μήκη και αντιστρόφως. Το μήκος του τμήματος θα συμβολίζεται όπως και το τμήμα. Όπου όμως δημιουργείται σύγχυση θα αναφέρεται ρητά ο όρος "μήκος ευθ. τμήματος" Θα γίνει σύντομη ιστορική αναφορά στη μέτρηση και θα αναφερθεί το αξίωμα Αρχιμήδους - Ευδόξου, που κατοχυρώνει την ύπαρξη του μέτρου ενός τμήματος. Ότι αναφέρθηκε για τον λόγο και το μήκος τμήματος ισχύει και για άλλα γεωμετρικά μεγέθη και τις μετρήσεις τους όπως η γωνία , το τόξο, το εμβαδόν και ο όγκος
20. ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ Ιδιότητες τμημάτων ευθειών που περιέχονται μεταξύ παραλλήλων. Θεώρημα του Θαλή σε τρίγωνο και το αντίστροφό του.	Να γνωρίζουν και να μπορούν να εφαρμόζουν το θεώρημα του Θαλή. Να μπορούν να κατασκευάζουν την τετάρτη ανάλογο τριών τμημάτων. Να μπορούν να χωρίζουν ένα τμήμα εσωτερικά και εξωτερικά σε λόγο $\frac{\mu}{\nu} \neq 1$.	Η απόδειξη του θεωρήματος του Θαλή θα γίνει στην περίπτωση των συμμέτρων ευθ. τμημάτων και θα γίνει σχολιασμός για την περίπτωση των ασύμμετρων. Το αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή θα εξεταστεί μέσα από σχετική δραστηριότητα των μαθητών.
20. ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ ΚΥΚΛΟΣ	Να μπορούν να αποδεικνύουν το θεώρημα των διχοτόμων της εσωτερικής και της εξωτερικής	Θα υπολογιστούν τα τμήματα στα οποία χωρίζει η διχοτόμος την αντίστοιχη πλευρά

• Θεώρημα των διχοτόμων τριγώνου.	γωνίας τριγώνου .	τριγώνου συναρτήσει των πλευρών του και θα γίνει αναφορά στα αρμονικά συζυγή σημεία.
• Γεωμετρικός τόπος των σημείων που ο λόγος των αποστάσεων τους από δύο σημεία είναι $\frac{\mu}{\nu} \neq 1$.	Να μπορούν να κατασκευάζουν τον κύκλο του Απολλώνιου	
21. ΟΜΟΙΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ.		
Όμοια ευθύγραμμα σχήματα Σμίκρυνση - Μεγέθυνση και ομοιότητα. Κατασκευή όμοιων πολυγώνων.	Να γνωρίζουν την έννοια των ομοίων ευθύγραμμων σχημάτων.	Με την σμίκρυνση ή την μεγέθυνση ενός σχήματος προκύπτουν σχήματα που έχουν γωνίες ίσες και πλευρές ανάλογες· τα σχήματα αυτά μπορεί να μην είναι ίσα. Δύο τέτοια σχήματα λέγονται όμοια. Θα γίνει προοπτική κατασκευή δύο ομοίων σχημάτων. Θα αποδειχτεί ότι ο λόγος ομοιότητας δύο όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων είναι ίσος με το λόγο των περιμέτρων τους. Θα τονιστεί ότι με την χρήση της ομοιότητας μπορούμε να μετρήσουμε μήκη ευθ. τμημάτων που είναι απρόσιτα.
Κριτήρια ομοιότητας	•Να μπορούν να αποδεικνύουν ότι δύο τρίγωνα είναι όμοια όταν έχουν: Τις γωνίες τους ίσες Δύο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες γωνίες τους ίσες - Τις τρεις πλευρές ανάλογες.	Θα αναφερθεί ότι αρκούν δυο ίσες γωνίες για να είναι όμοια δύο τρίγωνα.

Γ. Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά της

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ι. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

1. Άλγεβρα Ώρες: 2 την εβδομάδα

Περιεχόμενα	Στόχοι	Οδηγίες
1.ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ημχ, συνχ, εφχ.	Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν τις βασικές ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και να κατασκευάζουν τις γραφικές τους παραστάσεις.	Θα δοθούν παραδείγματα φυσικών φαινομένων, όπως για παράδειγμα η κίνηση του εκκρεμούς, τα οποία περιγράφονται με τριγωνομετρικές συναρτήσεις.
Περιοδικές συναρτήσεις	Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν την έννοια της περιοδικής συνάρτησης. Να μπορούν να συνδέουν τις περιοδικές συναρτήσεις με περιοδικά φαινόμενα. Να σχεδιάζουν τις γραφικές παραστάσεις περιοδικών συναρτήσεων. Να μπορούν να βρίσκουν από πίνακα τιμών ή γραφική παράσταση, την αντίστοιχη τριγωνομετρική συνάρτηση.	Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=\alpha\,\eta\mu(x-\omega)+\beta$ και $y=\alpha\,\sigma\upsilon\nu(x-\omega)+\beta$, θα προκύψουν από τις γραφικές παραστάσεις των $\alpha\,\eta\mu x$ και $\alpha\,\sigma\upsilon\nu x$, με παράλληλη μεταφορά. Με παραδείγματα, θα γίνει κατανοητό ότι η περίοδος των $\eta\mu(\nu x)$ και $\sigma\upsilon\nu(\nu x)$ είναι $\frac{2\pi}{\nu}$ Πιο συγκεκριμένα, η περίοδος προκύπτει από την παρατήρηση ότι κάθε τιμή της επαναλαμβάνεται όταν το νx αυξηθεί κατά 2π, δηλαδή όταν το x αυξηθεί κατά $\frac{2\pi}{\nu}$ Από πίνακα τιμών που περιέχει μετρήσεις περιοδικού φαινομένου, για παράδειγμα το ύψος θάλασσας κατά την παλίρροια σε ένα τόπο, θα συνάγεται ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το φαινόμενο.
Τριγωνομετρικές εξισώσεις	Οι μαθητές πρέπει: Να μπορούν να λύνουν απλές	Με κατάλληλες δραστηριότητες θα γίνει η εισαγωγή στην

	τριγωνομετρικές εξισώσεις.	έννοια των τριγωνομετρικών εξισώσεων. Η επίλυση των βασικών τριγωνομετρικών εξισώσεων να γίνει με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου. Ως βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις θεωρούνται οι : ημχ=α, συνχ=α, εφχ=α και σφχ=α. Οι γραφικές παραστάσεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων βοηθούν στην κατανόηση της ύπαρξης άπειρου πλήθους ριζών μιας τριγωνομετρικής εξίσωσης.
Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος τόξων ή γωνιών. και του διπλάσιου τόξου	Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν και να χρησιμοποιούν τους τύπους των τριγωνομετρικών αριθμών αθροίσματος και διαφοράς τόξων ή γωνιών.	Θα αποδειχθεί ο τύπος του $συν(α-β)$ και από αυτόν θα προκύψουν οι υπόλοιποι τύποι του αθροίσματος γωνιών ή τόξων. Δεν είναι σκοπός η απομνημόνευση των τύπων αλλά η χρησιμοποίησή τους στην επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων. Ως εφαρμογή, θα βρεθούν οι τύποι του διπλασίου τόξου και. Ως εφαρμογή θα γίνει η μελέτη της συνάρτησης: $y = α\,ημx + β\,συνx$ Δεν είναι σκοπός η απομνημόνευση των τύπων αλλά η χρησιμοποίησή τους στην επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων.
Οι νόμοι ημιτόνων και συνημιτόνων	Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν και να μπορούν να χρησιμοποιούν τους νόμους ημιτόνων και συνημιτόνων στην επίλυση προβλημάτων.	Στην παράγραφο αυτή θα γίνει επίλυση τριγώνου όταν δίνονται επαρκή δεδομένα και θα επιλυθούν πραγματικά προβλήματα, όπως για παράδειγμα ο προσδιορισμός της απόστασης απρόσιτου σημείου.

2. ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.		
	Οι μαθητές πρέπει: Να αναγνωρίζουν την πολυωνυμική συνάρτηση και να κάνουν πράξεις με πολυωνυμικές συναρτήσεις.	Θα δοθεί μόνον ο ορισμός της πολυωνυμικής συνάρτησης και όχι ο αλγεβρικός ορισμός της έννοιας του πολυωνύμου. Θα ορισθούν οι πράξεις της πρόσθεσης, του πολ/σμού και της Ευκλείδειας διαίρεσης μεταξύ πολυωνυμικών συναρτήσεων.
Επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων.	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: Να επιλύουν πολυωνυμικές εξισώσεις. Να επιλύουν προβλήματα με τη βοήθεια των πολυωνυμικών εξισώσεων.	Για τη λύση πολυωνυμικών εξισώσεων θα χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της ανάλυσης του πολυωνύμου σε γινόμενο παραγόντων. Θα χρησιμοποιηθούν τα κριτήρια εύρεσης των πιθανών ριζών. Το σχήμα του Hor ner θα χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των τιμών μιας πολυωνυμικής συνάρτησης. Θα χρησιμοποιηθεί η γραφική παράσταση για τον κατά προσέγγιση προσδιορισμό της ρίζας πολυωνυμικής εξίσωσης. Θα λυθούν εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές. Ως εφαρμογές θα λυθούν εξισώσεις με ριζικά 2ας τάξεως.
3. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ-ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΠΡΟΟΔΟΙ		
Ακολουθίες πραγματικών αριθμών.	Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν ότι η ακολουθία είναι πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο N*.	Η εισαγωγή στην έννοια της ακολουθίας θα γίνει με ένα πρόβλημα, για παράδειγμα το πρόβλημα του ανατοκισμού.
Αριθμητική και Γεωμετρική Πρόοδος	Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν πότε μία ακολουθία είναι αριθμητική και πότε γεωμετρική πρόοδος. Να μπορούν να βρίσκουν το γενικό όρο αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου. Να υπολογίζουν το άθροισμα των πρώτων ν όρων αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.	Θα βρεθούν οι συνθήκες για να είναι τρεις αριθμοί διαδοχικοί όροι αριθμητικής ή γεωμετρικής προόδου. Με κατάλληλα παραδείγματα, θα δειχθεί ότι οι όροι της γεωμετρικής προόδου μεταβάλλονται πολύ γρηγορότερα από τους αντίστοιχους όρους αριθμητικής προόδου.

		Ο τύπος του αθροίσματος των άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου με $\|\lambda\|<1$, θα προκύψει με κατάλληλα παραδείγματα, χωρίς την αυστηρή εισαγωγή της έννοιας του ορίου. Με αφορμή την αριθμητική και τη γεωμετρική πρόοδο, θα γίνει εισαγωγή της έννοιας της αναδρομικής ακολουθίας. Θα λυθούν παραδείγματα με τα οποία θα φαίνεται η σημασία της αναδρομικότητας.
Ανατοκισμός Ίσες καταθέσεις Χρεωλυσία.	Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν τις έννοιες του Ανατοκισμού, των Ίσων Καταθέσεων και της Χρεωλυσίας και να τις χρησιμοποιούν στην επίλυση σχετικών προβλημάτων.	Στην επίλυση των προβλημάτων θα χρησιμοποιηθεί ο υπολογιστής τσέπης.
3. Η ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν την έννοια της εκθετικής συνάρτησης και τις ιδιότητές της. Να μπορούν να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης. Να επιλύουν εκθετικές εξισώσεις και συστήματα καθώς και προβλήματα εκθετικής μεταβολής.	Η εισαγωγή στην έννοια της εκθετικής συνάρτησης θα γίνει με κατάλληλα προβλήματα τα οποία θα οδηγήσουν στο νόμο της εκθετικής μεταβολής, όπως για παράδειγμα, ο ανατοκισμός και η γεωμετρική πρόοδος. Οι ιδιότητες της $y=\alpha^{x}$, θα εξηγηθούν με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης.. Η επέκταση της εκθετικής συνάρτησης για x πραγματικό αριθμό, θα γίνει με τη βοήθεια ρητών προσεγγίσεων του x. Στην εκθετική συνάρτηση $y=e^{x}$ δε θα οριστεί ο αριθμός e,αλλά θα δοθεί απευθείας η τιμή του.
Δεκαδικοί και φυσικοί λογάριθμοι.	Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν την έννοια του λογαρίθμου και να υπολογίζουν δεκαδικούς και φυσικούς λογάριθμους. Να γνωρίζουν τις ιδιότητες των λογαρίθμων και να τις χρησι-	Για τον υπολογισμό των λογαρίθμων θα χρησιμοποιηθεί ο υπολογιστής τσέπης. Η αλλαγή βάσης λογαρίθμων θα δοθεί ως δραστηριότητα και θα συσχετίζει μόνον δεκαδικούς και φυσικούς λογάριθμους.

	μοποιούν στην επίλυση προβλημάτων.	
Η λογαριθμική συνάρτηση.	Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν την έννοια της λογαριθμικής συνάρτησης και τις ιδιότητές της. Να μπορούν να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης. Να επιλύουν λογαριθμικές εξισώσεις και συστήματα και σχετικά προβλήματα.	Θα εξεταστούν μόνο η λογαριθμική συνάρτηση με βάση το 10 και με βάση το e. Θα τονιστεί ότι οι γραφικές παραστάσεις της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης, είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των ορθογωνίων αξόνων. Δε θα αναφερθεί η έννοια της αντίστροφης συνάρτησης. Η λογαριθμική συνάρτηση θα οριστεί ως συνάρτηση η οποία σε κάθε πραγματικό αριθμό x, $x>0$ αντιστοιχίζει τον πραγματικό αριθμό $\log x$.
Έννοια του ρυθμού μεταβολής. Γεωμετρική σημασία.		Θα μελετηθεί εποπτικά ο ρυθμός μεταβολής των συναρτήσεων $f(x)=e^x$ και $f(x)=\log x$.

2. Γεωμετρία Ώρες: 2 την εβδομάδα

Περιεχόμενα	Στόχοι	Οδηγίες
1. ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ		
Ορθή προβολή σημείου και τμήματος σε άξονα Πυθαγόρειο θεώρημα	Να μπορούν να αποδεικνύουν το πυθαγόρειο θεώρημα και το αντίστροφό του. Να μπορούν να κατασκευάζουν - Τμήμα ίσο με $\sqrt{2}\alpha, \sqrt{3}\alpha, \sqrt{5}\alpha$ όπου α δοθέν τμήμα. -Τη μέση ανάλογο δύο τμημάτων.	Θα αποδειχτεί πρώτα ότι σε ένα ορθ.τρίγωνο τρίγωνο ΑΒΓ ($A=90^o$) αν Δ είναι η προβολή του Α στη ΒΓ ισχύουν: $AB^2=\Delta B.B\Gamma$, $A\Gamma^2=\Delta\Gamma.B\Gamma$ $A\Delta^2=\Delta B.\Delta\Gamma$ Θα υπολογιστεί ως εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος η υποτείνουσα ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου με κάθετη πλευρά α,και θα διαπιστωθεί η ύπαρξη τμημάτων με λόγο $\sqrt{2}$.
Γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος .	Να μπορούν να αποδεικνύουν το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα.	Θα γίνει σύντομη ιστορική αναφορά στο πυθαγόρειο θεώρημα και θα αποδειχτεί η πρόταση: "Ο λόγος της διαγωνίου τετραγώνου προς την κάθετη πλευρά του δεν είναι ρητός αριθμός". Ως πόρισμα θα αναφερθεί το θεώρημα των συνημιτόνων.
Θεωρήματα διαμέσων.	Να μπορούν να αποδεικνύουν τα θεωρήματα των διαμέσων τριγώνου.	Θα υπολογιστεί το μήκος των διαμέσων και των υψών τριγώνου από τις πλευρές του. Ως εφαρμογή του θεωρήματος των διαμέσων θα βρεθούν οι γ. τόποι των σημείων Μ του επιπέδου όταν: - $(AM)^2+(BM)^2=k^2$ - $(AM)^2-(BM)^2=k^2$ όπου Α, Β είναι γνωστά σημεία και κ γνωστό ευθ. τμήμα

2 ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΕ ΚΥΚΛΟ		
Ιδιότητες των τμημάτων μιας τέμνουσας ενός κύκλου.	Να μπορούν να αποδεικνύουν ότι αν Σ είναι σταθερό σημείο και ΣΑΒ μια τυχαία τέμνουσα ενός κύκλου, το γινόμενο ΣΑ.ΣΒ είναι σταθερό.	Θα οριστεί ως δύναμη του σημείου Σ ως προς τον κύκλο (O,ρ) η διαφορά $ΣO^2 - \rho^2$ Το πρόσημο της δύναμης του Σ ως προς τον κύκλο καθορίζει τη θέση του σημείου ως προς αυτόν και αντιστρόφως. Θα γίνει σχολιασμός της κατασκευής των ριζών της δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Θα γίνει σύντομη ιστορική αναφορά στο πρόβλημα της χρυσής τομής.
Δύναμη σημείου ως προς κύκλο.	Να μπορούν να αποδεικνύουν ότι αν ΣΑ είναι εφαπτόμενη ενός κύκλου (O,ρ), τότε $ΣA^2 = ΣO^2 - \rho^2$	
Διαίρεση τμημάτων σε μέσο και άκρο λόγο.	Να μπορούν να διαιρούν τμήμα σε μέσο και άκρο λόγο.	
3. ΕΜΒΑΔΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ		
Η έννοια του εμβαδού Ισοδύναμα σχήματα Εμβαδά: Ορθογωνίου, τριγώνου, παραλληλογράμμου, τραπεζίου.	Να γνωρίζουν την έννοια του εμβαδού ευθύγραμμων σχημάτων καθώς και την έννοια των ισοδύναμων σχημάτων. Να μπορούν να αποδεικνύουν τους γενικούς τύπους των εμβαδών των βασικών ευθύγραμμων σχημάτων.	Θ' αναφερθεί ότι κάθε κλειστό πολυγωνικό χωρίο καταλαμβάνει μια έκταση στο επίπεδο που προσδιορίζεται περαιτέρω με το μέγεθος του εμβαδού, Τα εμβαδά των πολυγωνικών χωρίων έχουν τις εξής ιδιότητες: - Ίσα πολυγωνικά χωρία έχουν ίσα εμβαδά. - Αν μια πολυγωνική επιφάνεια χωρίζεται σε πολυγωνικά χωρία που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, το εμβαδόν της ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των πολυγωνικών χωρίων. - Αν μια πολυγωνική επιφάνεια E_1 περιέχεται σε μια πολυγωνική επιφάνεια E_2, το εμβαδόν της είναι μικρότερο του εμβαδού της E_2. Τις ιδιότητες αυτές τις αποδεχόμαστε ως αληθείς από την εμπειρία μας χωρίς περαιτέρω διευκρινίσεις.

		• Στα επόμενα , το εμβαδόν θα εκφράζεται μέσω αριθμητικών τύπων που υπόκεινται σε λογισμό. Για το σκοπό αυτό αποδεχόμαστε χωρίς περαιτέρω διευκρινίσεις , δηλαδή ως αξίωμα , ότι κάθε τετράγωνο πλευράς α έχει εμβαδόν α^2. •Θα επισημανθεί ότι τα επίπεδα σχήματα που δεν είναι ίσα ή όμοια μπορούν να συγκριθούν ως προς το εμβαδόν τους.
		Ως εφαρμογές των γενικών τύπων των εμβαδών των βασικών σχημάτων θα υπολογιστούν τα εμβαδά - Του ισόπλευρου τριγώνου - Του ρόμβου. Εκτός από το βασικό τύπο του εμβαδού ενός τριγώνου θα αποδειχτούν και οι τύποι $E = \tau\rho, \quad E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$ $E = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$ *Θα αποδειχθεί ο τύπος* $E = \frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma$, *και ως άμεση* συνέπεια αυτού θα προκύψει το θεώρημα ημιτόνων.
4. ΕΜΒΑΔΟ ΚΑΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ Λόγος εμβαδών όμοιων: • Τριγώνων • Κυρτών πολυγώνων	Να κατανοήσουν ότι ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων επίπεδων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας	Θα επισημανθεί ότι δύο τρίγωνα: -Με ίσες βάσεις έχουν λόγο εμβαδών ίσο με το λόγο των υψών τους. - Με ίσα ύψη έχουν λόγο εμβαδών ίσο με το λόγο των βάσεων. Επίσης τρίγωνα που έχουν κοινή βάση και οι κορυφές τους ανήκουν σε ευθεία παράλληλη

		προς τη βάση είναι ισοδύναμα.
Το πρόβλημα του τετραγωνισμού κυρτού πολυγώνου	Να κατανοήσουν το πρόβλημα του τετραγωνισμού κυρτού πολυγώνου	Θα γίνει η κατασκευή του ισοδύναμου προς το δοθέν πολύγωνο, τετραγώνου, και σύντομη ιστορική αναφορά στην απόδειξη του πυθαγορείου θεωρήματος με τη βοήθεια των εμβαδών
5. ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ		
Ορισμός και στοιχεία κανονικού πολυγώνου. Βασικές ιδιότητες. Εγγραφή τετραγώνου , κανονικού εξαγώνου και ισόπλευρου τριγώνου σε κύκλο. Κατασκευή κανονικού δεκαγώνου.	Να μπορούν να αποδεικνύουν ότι κάθε κανονικό πολύγωνο εγγράφεται και περιγράφεται σε κύκλο. Να μπορούν να αποδεικνύουν τις σχέσεις που συνδέουν τα στοιχεία ενός κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο. Να μπορούν να εγγράφουν σε κύκλο ακτίνας R, τετράγωνο ισόπλευρο τρίγωνο και κανονικό εξάγωνο. Να μπορούν να κατασκευάζουν κανονικό δεκάγωνο με κανόνα και διαβήτη	Θα αποδειχτεί ως πόρισμα ότι δύο κανονικά πολύγωνα με τον αυτό αριθμό πλευρών είναι όμοια. Θα αποδειχτεί ότι αν λ_ν είναι η πλευρά , α_ν το απόστημα , P_ν η περίμετρος και E_ν το εμβαδόν κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R ισχύουν: $\left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2 + \alpha_\nu^{\ 2} = R^2,\ \ P_\nu = \nu \cdot \alpha_\nu$ $E_\nu = \frac{P_\nu \alpha_\nu}{2}$ Η εγγραφή κανονικών πολυγώνων με πλήθος πλευρών ν = 3,4,6 ανάγεται στη διαίρεση του κύκλου στον αντίστοιχο αριθμό τόξων. Οι τύποι που συνδέουν τα στοιχεία αυτών των πολυγώνων θα παρουσιαστούν με συντομία. Θα γίνει αναφορά στο κανονικό δεκάγωνο.
6. ΜΗΚΟΣ ΚΥΚΛΟΥ		
Προσέγγιση του μήκους του κύκλου με κανονικά πολύγωνα. Μήκος κύκλου και τόξων	Να κατανοήσουν ότι με συνεχή διπλασιασμό του αριθμού των πλευρών εγγεγραμμένου ή περιγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου σε κύκλο προσεγγίζεται το μήκος του κύκλου. Να μπορούν να βρίσκουν το μήκος τόξου όταν είναι	Η προσέγγιση του μήκους του κύκλου θα γίνει εποπτικά. Δε θα γίνει απόδειξη του θεωρήματος:μήκος κύκλου / διάμετρος = π Θα γίνει αναφορά στη μέτρηση γωνιών με ακτίνια , στη σχέση των μέτρων μιας γωνίας σε

	γνωστό το μέτρο του. Να γνωρίζουν ότι το ακτίνιο είναι τόξο κύκλου του οποίου το μήκος είναι ίσο με την ακτίνα.	μοίρες και ακτίνια και θα δοθεί ο τύπος του μήκους του κύκλου όταν το τόξο εκφράζεται σε ακτίνια.
7. ΕΜΒΑΔΟ ΚΥΚΛΟΥ		
Προσέγγιση του εμβαδού με κανονικά πολύγωνα. Εφαρμογές στο εμβαδόν κυκλικού τομέα	Να κατανοήσουν ότι με συνεχή διπλασιασμό του αριθμού των πλευρών εγγεγραμμένου ή περιγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου σε κύκλο προσεγγίζεται το εμβαδόν του κύκλου. Να μπορούν να βρίσκουν το εμβαδόν κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί σε δεδομένο τόξο	Η προσέγγιση του εμβαδού του κύκλου θα γίνει εποπτικά. Θα αναφερθεί ο τύπος του εμβαδού κυκλικού τομέα όταν το τόξο εκφράζεται σε ακτίνια. Θα γίνει ιστορική αναφορά στη μέτρηση και στο τετραγωνισμό του κύκλου και σε άλλα άλυτα προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών της Αρχαιότητας. Ως δραστηριότητα, θα γίνει η διαπραγμάτευση κλασικών προβλημάτων τετραγωνισμού μικτόγραμμου σχήματος, π.χ μηνίσκοι του Ιπποκράτη
8. ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΤΟ ΧΩΡΟ		
Η έννοια του επιπέδου και ο καθορισμός του. Σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων στο χώρο.	Να συστηματοποιήσουν τις γνώσεις τους σχετικά με την έννοια του επιπέδου και να κατανοήσουν τον τρόπο καθορισμού του. Να κατανοήσουν τις σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου δύο ευθειών καθώς και δύο επιπέδων.	Για την ομαλή μετάβαση από τις έννοιες της επίπεδης Γεωμετρίας στη Γεωμετρία του χώρου θα γίνει αναφορά, σύντομα και εποπτικά, στις αντιστοιχίες που έχουν οι έννοιες και οι ιδιότητές τους. Π.χ. Από ένα σημείο διέρχονται άπειρες ευθείες, και από μια ευθεία διέρχονται άπειρα επίπεδα. Την έννοια του επιπέδου την δεχόμαστε όπως προκύπτει άμεσα από την εμπειρία μας. Διευκρινίζεται όμως από τις εξής παραδοχές: -Σε κάθε επίπεδο ανήκουν τουλάχιστον τρία μη συνευθειακά σημεία. -Υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του χώρου που δεν

		ανήκει στο επίπεδο. -Δύο σημεία του επιπέδου ορίζουν μία ευθεία που περιέχεται στο επίπεδο. -Αν δύο επίπεδα έχουν ένα κοινό σημείο Α, έχουν κοινή μία ευθεία στην οποία ανήκει το σημείο Α. -Τρία μη συνευθειακά σημεία ορίζουν ένα και μόνο ένα επίπεδο. -Κάθε επίπεδο χωρίζει το χώρο σε δύο ημιχώρους. Ως συνέπεια των προηγούμενων παραδοχών κατοχυρώνεται ότι: -μια ευθεία και ένα σημείο εκτός αυτής, -δυο τεμνόμενες ευθείες, - δύο παράλληλες ευθείες, ορίζουν ένα και μόνο ένα επίπεδο. Οι σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου , δύο ευθειών, καθώς και δύο επιπέδων, θα παρουσιαστούν εποπτικά. Θα δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στην έννοια της ασυμβατότητας δύο ευθειών.
9. Η ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ ΚΑΙ Η ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ		
Ευθείες και επίπεδα παράλληλα - θεώρημα του Θαλή. Γωνία δύο ευθειών - ορθογώνιες ευθείες. Απόσταση σημείου από επίπεδο, απόσταση δύο παραλλήλων επιπέδων. Δίεδρη γωνία - αντίστοιχη επίπεδη μιας δίεδρης - κάθετα επίπεδα. Προβολή σημείου και ευθείας σε επίπεδο. Κλίση ευθείας σε επίπεδο.	Να μπορούν να αποφαίνονται πότε: - μία ευθεία και ένα επίπεδο είναι παράλληλα. -δύο επίπεδα είναι παράλληλα. Να μπορούν να αποφαίνονται πότε: -δύο ασύμβατες ευθείες είναι ορθογώνιες. -μία ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο. Να μπορούν να αποφαίνονται πότε δύο επίπεδα είναι κάθετα. Να αποκτήσουν την ικανότητα να αποτυπώνουν σχεδιαστικά	Θα αποδειχτούν τα θεωρήματα: -Αν μια ευθεία είναι παράλληλη σε μια ευθεία του επιπέδου , θα είναι παράλληλη στο επίπεδο. - Κάθε επίπεδο που τέμνει μια ευθεία θα τέμνει και κάθε παράλληλη προς αυτή. - Κάθε επίπεδο που τέμνει ένα άλλο θα τέμνει και κάθε παράλληλο προς αυτό. -Αν δύο τεμνόμενες ευθείες είναι παράλληλες σε ένα επίπεδο , το επίπεδό τους είναι παράλληλο προς αυτό.

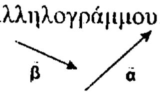
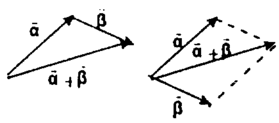
	και να ερμηνεύουν εποπτικά ιδιότητες των στοιχείων του χώρου.	- Αν ένα επίπεδο (Π) διέρχεται από μια ευθεία (ε) που είναι κάθετη σε ένα επίπεδο (Ρ), τότε το (Π) είναι κάθετο στο (Ρ). -Το θεώρημα των τριών καθέτων. Μια ευθεία που τέμνει ένα επίπεδο λέγεται κάθετη σε αυτό, όταν είναι κάθετη σε κάθε ευθεία του επιπέδου που διέρχεται από το ίχνος της. Ως μέτρο μιας δίεδρης γωνίας ορίζεται το μέτρο της αντίστοιχης επίπεδης γωνίας. Δύο επίπεδα λέγονται κάθετα, όταν ορίζουν δίεδρη γωνία 90^{o}. Ως κλίση μιας ευθείας σε ένα επίπεδο ορίζεται η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με την προβολή της στο επίπεδο. Θα δοθεί ο ορισμός της ορθογωνιότητας στο χώρο και θα αποδειχτούν οι προτάσεις: - Μια ευθεία είναι ορθογώνια σε επίπεδο, όταν είναι κάθετη σε δύο τεμνόμενες ευθείες του επιπέδου. Θα εξεταστεί πρώτα η περίπτωση που οι ευθείες διέρχονται από το ίχνος της τέμνουσας. Η κλίση μιας ευθείας ως προς ένα επίπεδο είναι μικρότερη ή ίση από κάθε γωνία που σχηματίζεται από την ευθεία και μια οποιαδήποτε ευθεία του επιπέδου που διέρχεται από το ίχνος της. Θα διδαχθούν οι γεωμετρικοί τόποι του μεσοκάθετου και του μεσοπαράλληλου επιπέδου. Ως ασκήσεις μπορούν να δοθούν και άλλοι στοιχειώδεις γ.τ
10. ΠΡΙΣΜΑΤΑ		
Ορισμός και στοιχεία του πρίσματος.	Να εμπεδώσουν και να συμπληρώσουν τις γνώσεις τους σχετικά με το πρίσμα	Θα καθοριστεί ο τρόπος δημιουργίας των πρισματικών επιφανειών, θα γίνει σύντομη

Παραλληλεπίπεδο, κύβος. Ιδιότητες παραλληλεπιπέδου. Μέτρηση πρίσματος.	και την πυραμίδα. Να κατανοήσουν τον τρόπο δημιουργίας των στερεών σχημάτων που θα μελετηθούν.	αναφορά στη στερεά γωνία, θα αναφερθούν τα στοιχεία ενός πρίσματος και θα αποδειχτεί ότι: - Οι απέναντι έδρες κάθε παραλληλεπιπέδου είναι ίσες και παράλληλες . - Κάθε διαγώνιο επίπεδο ενός παραλληλεπιπέδου το διαιρεί σε δύο ίσα ή ισοδύναμα πρίσματα. -Η διαγώνιος δ κάθε ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με ακμές α,β,γ είναι $\delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$.. Θα υπολογισθεί μόνο το εμβαδόν της επιφάνειας ορθού πρίσματος , το οποίο θα εξηγηθεί και με τη βοήθεια του αναπτύγματος του. Δεχόμαστε χωρίς απόδειξη ότι: -Ο όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστά σεις α,β,γ είναι **V=αβγ.** -Ο όγκος παντός παραλληλε πιπέδου ισούται με το γινόμενο της βάσης του επί το ύψος. Στη συνέχεια θα αποδειχτεί ότι "ο όγκος κάθε πρίσματος ισούται με το γινόμενο της βάσης του επί το ύψος" .
11. ΠΥΡΑΜΙΔΕΣ Ορισμός και στοιχεία πυραμίδας. Κανονική πυραμίδα, τετράεδρο. Μέτρηση πυραμίδας. Ορισμός και στοιχεία κόλουρης πυραμίδας. Μέτρηση κόλουρης πυραμίδας.		Θα υπολογιστεί μόνο το εμβαδόν της επιφάνειας κανονικής πυραμίδας το οποίο θα εξηγηθεί και με τη βοήθεια του αναπτύγματός της. Θα αποδειχτεί ότι η τομή πυραμίδας με επίπεδο παράλληλο προς τη βάση της είναι πολύγωνο όμοιο προς τη βάση, με λόγο ομοιότητας ίσο με το λόγο των αποστάσεων της κορυφής από τα δύο επίπεδα. Δεχόμαστε χωρίς απόδειξη ότι δύο τριγωνικές πυραμίδες οι

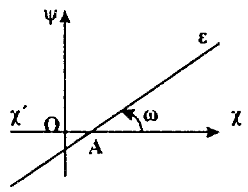
		οποίες έχουν ίσα ύψη και ίσες ή ισοδύναμες βάσεις έχουν ίσους όγκους. Στη συνέχεια θα αποδειχτούν: -Το ορθό τριγωνικό πρίσμα χωρίζεται σε τρεις ίσου όγκου τριγωνικές πυραμίδες και Ότι ο όγκος κάθε πυραμίδας είναι το 1/3 του γινομένου του εμβαδού της βάσης επί το ύψος της.
12. ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ Ο κύλινδρος ως στερεό εκ περιστροφής. Στοιχεία κυλίνδρου. Μέτρηση κυλίνδρου.	Να εμπεδώσουν και να συμπληρώσουν τις γνώσεις τους σχετικά με τα στερεά εκ περιστροφής.	Θα μελετηθεί μόνο ο ορθός κύλινδρος. Θα αναφερθεί χωρίς απόδειξη ότι η επιφάνεια και ο όγκος πρίσματος εγγεγραμμένου σε κύλινδρο , "τείνουν" στην επιφάνεια και στον όγκο του κυλίνδρου, όταν ο αριθμός των πλευρών της βάσης του πρίσματος συνεχώς διπλασιάζεται. Το εμβαδόν της επιφάνειας ορθού κυλίνδρου θα εξηγηθεί και με τη βοήθεια του αναπτύγματός του.
13 ΚΩΝΟΣ Ο κώνος ως στερεό εκ περιστροφής. Στοιχεία κώνου. Μέτρηση κώνου. Κόλουρος κώνος - μέτρηση κόλουρου κώνου.		Θα μελετηθεί μόνο ο ορθός κώνος. Θα αναφερθεί χωρίς απόδειξη ότι η επιφάνεια και ο όγκος κανονικής πυραμίδας εγγεγραμμένης σε κώνο <<τείνουν>> αντιστοίχως στην επιφάνεια και στον όγκο του κώνου , όταν ο αριθμός των πλευρών της βάσης κανονικής πυραμίδας συνεχώς διπλασιάζεται. Το εμβαδόν της επιφάνειας ορθού κώνου θα εξηγηθεί και με τη βοήθεια του αναπτύγματός του.
14. ΣΦΑΙΡΑ. Η σφαίρα ως στερεό εκ	Να αναγνωρίζουν τις τομές	Για τον υπολογισμό του όγκου

περιστροφής. Στοιχεία σφαίρας.	σφαίρας και επιπέδου καθώς και τα χαρακτηριστικά τους.	της σφαίρας θα χρησιμοποιηθεί το θεώρημα Πάππου το οποίο δεχόμαστε χωρίς απόδειξη.
Θέσεις ευθείας, επιπέδου ως προς τη σφαίρα. Μέτρηση σφαίρας.	Να κατανοήσουν τον ιδιαίτερο ρόλο και την χρησιμότητα των μέγιστων κύκλων.	Θα γίνει σύντομη ιστορική αναφορά στα κανονικά στερεά

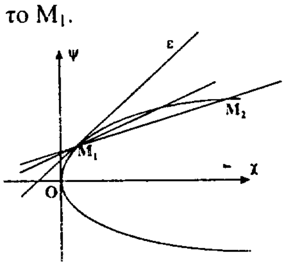
II. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Ώρες: 3 την εβδομάδα

Περιεχόμενο	**Στόχοι**	**Οδηγίες**
1. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ		
Η Έννοια του Διανύσματος	Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν την έννοια του διανύσματος και να χρησιμοποιούν με ορθό τρόπο την ορολογία που σχετίζεται με την έννοια αυτή.	Το διάνυσμα θα παρουσιασθεί ως ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα και δεν θα γίνει αναφορά στα ελεύθερα ή εφαρμοστά διανύσματα. Ως γωνία δυο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ορίζεται η κυρτή γωνία AOB όπου $\vec{OA}=\vec{\alpha}$ και $\vec{OB}=\vec{\beta}$. Επομένως, αν θ είναι η γωνία δυο διανυσμάτων, τότε $0 \le \theta \le \pi$.
Πρόσθεση - Αφαίρεση Διανυσμάτων	Οι μαθητές πρέπει: Να μπορούν να βρίσκουν το άθροισμα δυο διανυσμάτων Να γνωρίζουν τις ιδιότητες της πρόσθεσης διανυσμάτων και να μπορούν να τις χρησιμοποιούν στον προσδιορισμό του αθροίσματος πολλών διανυσμάτων Να μπορούν να βρίσκουν τη διαφορά δυο διανυσμάτων Να μπορούν να εκφράζουν ένα διάνυσμα με τη βοήθεια των διανυσματικών ακτίνων των άκρων του. Να γνωρίζουν την τριγωνική ανισότητα για τα μέτρα δυο διανυσμάτων.	Το άθροισμα δυο διανυσμάτων βρίσκεται με τον κανόνα του παραλληλογράμμου:   Οι ιδιότητες της πρόσθεσης των διανυσμάτων θα προκύψουν εποπτικά από τον ορισμό της. Η διαφορά $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ ορίζεται ως το άθροισμα $\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$.
Πολλαπλασιασμός Αριθμού με Διάνυσμα	Οι μαθητές πρέπει: Να μπορούν να πολλαπλασιάζουν αριθμό με διάνυσμα Να μπορούν να αποδεικνύουν την παραλληλία δυο διανυσμάτων Να μπορούν να εκφράζουν τη διανυσματική ακτίνα του μέσου	Μέσα από πραγματικά προβλήματα θα φανεί η ανάγκη πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα. Για παράδειγμα, αν ένα κινητό διπλασιάσει, τριπλασιάσει κτλ. την ταχύτητα του $\vec{V}$, τότε αυτή θα είναι $2\vec{V}$, $3\vec{V}$ κτλ. αντιστοίχως.

	ενός τμήματος ως συνάρτηση των διανυσματικών ακτίνων των άκρων του.	Θα τονισθεί ο πολύ σημαντικός ρόλος της ισοδυναμίας $\vec{a} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{\beta}$ στην απόδειξη πολλών προτάσεων.
Συντεταγμένες Διανύσματος	Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν πως ορίζεται ένα σύστημα Καρτεσιανών Συντεταγμένων και να μπορούν να αποδεικνύουν ότι κάθε διάνυσμα γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των μοναδιαίων διανυσμάτων Να μπορούν να βρίσκουν τις συντεταγμένες ενός γραμμικού συνδυασμού διανυσμάτων Να μπορούν να βρίσκουν το μέτρο ενός διανύσματος από τις συντεταγμένες του. Να μπορούν να βρίσκουν αν δυο διανύσματα είναι παράλληλα, όταν γνωρίζουν τις συντεταγμένες τους ή τους συντελεστές διεύθυνσης των διανυσμάτων.	Τα σχετικά με ένα Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων έχουν διδαχθεί και σε προηγούμενες τάξεις. Εδώ θα γίνει επανάληψη και πιο συστηματική παρουσίαση. Ο συμβολισμός ενός διανύσματος ως ένα διατεταγμένο ζεύγος με στοιχεία τις συντεταγμένες του, διευκολύνει το λογισμό τους. Ο τύπος του μέτρου ενός διανύσματος θα προκύψει με τη βοήθεια του Πυθαγόρειου Θεωρήματος. Αν $\vec{\alpha} = (\chi_1, \psi_1)$ και $\vec{\beta} = (\chi_2, \psi_2)$, θα αποδειχθεί η ισοδυναμία: $\vec{a} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$. Η συνθήκη αυτή παραλληλίας διανυσμάτων ισχύει και στις περιπτώσεις που για τα διανύσματα δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης. Ως γωνία του διανύσματος $\vec{\alpha}$ με τον άξονα χ΄χ ορίζεται η γωνία που διαγράφει ο ημιάξονας Οχ αν στραφεί περί το Ο κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπέσει με το διάνυσμα $\vec{OA} = \vec{\alpha}$. Αν φ είναι η γωνία αυτή, ισχύει $0 \leq \varphi < 2\pi$. Ως συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{a} = (x, y)$, ορίζεται το πηλίκο $\frac{x}{y}$, εφόσον $x \neq 0$.
Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων	Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δυο	Ο ορισμός του εσωτερικού γινομένου δυο διανυσμάτων, θα συσχετισθεί με το έργο, που

	διανυσμάτων Να γνωρίζουν και να μπορούν να βρίσκουν την αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου δυο διανυσμάτων Να γνωρίζουν τη συνθήκη καθετότητας δυο διανυσμάτων Να μπορούν να υπολογίζουν τη γωνία δυο διανυσμάτων από τις συντεταγμένες τους	παράγεται από μια δύναμη η οποία μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της. Από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου θα προκύψουν άμεσα η αντιμεταθετική ιδιότητα, η συνθήκη καθετότητας και το εσωτερικό τετράγωνο. Η αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου διευκολύνει τους υπολογισμούς και την απόδειξη των ιδιοτήτων του.
	Να μπορούν να αναλύουν ένα διάνυσμα σε δυο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες .	Η ανάλυση ενός διανύσματος σε δυο κάθετες συνιστώσες, μια παράλληλη με το $\vec{\alpha}$ και μια κάθετη σε αυτό, διευκολύνεται από τη σχέση $\vec{\alpha}\cdot\vec{v} = \vec{\alpha}\cdot προβ_{\vec{\alpha}}\vec{v}$
2. Η ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ		
Συντελεστής Διεύθυνσης Ευθείας	Οι μαθητές πρέπει: Να κατανοήσουν την έννοια του συντελεστή διεύθυνσης ευθείας και να μπορούν να τον υπολογίζουν όταν γνωρίζουν τη γωνία της με τον άξονα χ΄χ ή δυο σημεία της Να μπορούν να βρίσκουν αν δυο ευθείες είναι παράλληλες ή κάθετες	Αν μια ευθεία ε τέμνει τον άξονα χ΄χ στο Α, τότε ως γωνία που σχηματίζει η ε με τον χ΄χ ορίζουμε τη γωνία ω που διαγράφει ο χ΄χ όταν στραφεί κατά τη θετική φορά περί το Α μέχρι να συμπέσει με την ε.  Για την ω ισχύει: $0 \le \omega < \pi$ Ως συντελεστή διεύθυνσης της ε, όταν $\omega \neq \frac{\pi}{2}$, ορίζουμε την εφω. Οι συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας δυο ευθειών προκύπτουν άμεσα από τις αντίστοιχες συνθήκες των διανυσμάτων. Δεν θα αναφερθεί η σχέση που συνδέει τη γωνία δυο ευθειών και τους συντελεστές διεύθυνσης τους.

Εξίσωση Ευθείας	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: Να βρίσκουν την εξίσωση μιας ευθείας όταν γνωρίζουν ένα σημείο της και το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας Να βρίσκουν την εξίσωση μιας ευθείας όταν γνωρίζουν δυο σημεία της	Θα τονισθεί ότι η εξίσωση $\psi - \psi_0 = \lambda(\chi - \chi_0)$ δεν εφαρμόζεται όταν η ευθεία είναι κατακόρυφη. Στην περίπτωση αυτή η ευθεία έχει εξίσωση $\chi = \chi_0$. Θα αναφερθούν επίσης οι ειδικές μορφές εξισώσεων ευθείας : • $\psi = \lambda\chi + \beta$ • $\psi = \lambda\chi$ • $\psi = \psi_0$
Η εξίσωση $A\chi + B\psi + \Gamma = 0$	Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν και να μπορούν να αποδεικνύουν ότι η εξίσωση $A\chi+B\psi+\Gamma=0$,$A\neq0$ ή $B\neq0$ παριστάνει ευθεία. Να μπορούν να βρίσκουν ένα διάνυσμα παράλληλο και ένα κάθετο στην ευθεία $A\chi+B\psi+\Gamma=0$.	Η εξίσωση $A\chi + B\psi + \Gamma = 0$ (1) παριστάνει ευθεία, όταν $A\neq0$ ή $B\neq0$. Αν λυθεί η (1) ως προς ψ προκύπτει άμεσα ότι • ο συντελεστής διεύθυνσης είναι $-\frac{A}{B}$ • το διάνυσμα $\vec{\eta}=(A,B)$ είναι κάθετο στην ευθεία. το διάνυσμα $\vec{\delta}=(B,-A)$ είναι παράλληλο στην ευθεία
Απόσταση Σημείου από Ευθεία - Εμβαδόν Τριγώνου	Οι μαθητές πρέπει: Να μπορούν να υπολογίζουν την απόσταση ενός σημείου από μια ευθεία Να μπορούν να υπολογίζουν το εμβαδόν ενός τριγώνου όταν δίνονται οι συντεταγμένες των κορυφών του	Θα αποδειχθεί ότι το εμβαδόν τριγώνου με κορυφές $A(\chi_1, \psi_1)$, $B(\chi_2, \psi_2)$ και $\Gamma(\chi_3, \psi_3)$ είναι: $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} x_2 - x & y_2 - y_1 \\ x_3 - x & y_3 - y \end{vmatrix}\right\|$
3.ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ		
Ο κύκλος	Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν και να μπορούν να βρίσκουν την εξίσωση ενός κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και δεδομένη ακτίνα Να μπορούν να βρίσκουν τις παραμετρικές εξισώσεις ενός κύκλου Να μπορούν να βρίσκουν την	Με τον κύκλο και τις ιδιότητες του οι μαθητές είναι ήδη εξοικειωμένοι από την Ευκλείδεια Γεωμετρία και δεν αναμένεται να συναντήσουν ιδιαίτερες δυσκολίες. Για τον ορισμό της

	εξίσωση της εφαπτομένης ενός κύκλου Να μπορούν να εξετάζουν αν η εξίσωση $\chi^2 + \psi^2 + A\chi + B\psi + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο και να βρίσκουν τα στοιχεία του καθώς και την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου αυτού σε ένα σημείο του.	εφαπτομένης κύκλου θα χρησιμοποιηθεί ο γεωμετρικός ορισμός της εφαπτομένης. Για τον προσδιορισμό του κύκλου που παριστάνει μια εξίσωση της μορφής $\chi^2 + \psi^2 + A\chi + B\psi + \Gamma = 0$ θα χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της συμπλήρωσης τετραγώνου
Η Παραβολή	Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν τον ορισμό της παραβολής και να μπορούν να βρίσκουν την εξίσωση της Να μπορούν να βρίσκουν τις ιδιότητες της παραβολής που προκύπτουν από την εξίσωση της Να μπορούν να βρίσκουν την εξίσωση της εφαπτομένη της παραβολής σε ένα σημείο της Να γνωρίζουν και να μπορούν να αποδεικνύουν την ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής	Ως εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής σε ένα σημείο της M_1, θα ορισθεί η εξίσωση της ευθείας που αποτελεί την οριακή θέση μιας τέμνουσας M_1M_2 της παραβολής, καθώς το M_2 κινούμενο επί της παραβολής τείνει να συμπέσει με το M_1.  Με ανάλογο τρόπο θα ορισθούν και οι εφαπτόμενες των άλλων κωνικών. Η ανακλαστική ιδιότητα των κωνικών θα αποδειχθεί μόνο στην περίπτωση της παραβολής.
Η Ελλειψη	Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν τον ορισμό της έλλειψης και να μπορούν να βρίσκουν την εξίσωση της Να μπορούν να βρίσκουν τις ιδιότητες της έλλειψης που προκύπτουν από την εξίσωση της Να μπορούν να βρίσκουν την εξίσωση της εφαπτομένη της έλλειψης σε ένα σημείο της Να γνωρίζουν την ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης	Στην αναζήτηση της εξίσωσης της έλλειψης δεν θα αποδειχθεί το αντίστροφο. Θα αναφερθεί χωρίς απόδειξη η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης σε ένα σημείο της.

	Να γνωρίζουν την εκκεντρότητα της έλλειψης και τη σημασία που έχει για τη μορφή της.	
Η Υπερβολή	Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν τον ορισμό της υπερβολής και να μπορούν να βρίσκουν την εξίσωση της Να μπορούν να βρίσκουν τις ιδιότητες της υπερβολής που προκύπτουν από την εξίσωση της Να μπορούν να βρίσκουν την εξίσωση της εφαπτομένη της υπερβολής σε ένα σημείο της Να γνωρίζουν την ανακλαστική ιδιότητα της υπερβολής Να γνωρίζουν την εκκεντρότητα της υπερβολής και τη σημασία που έχει για τη μορφή της. Να μπορούν να βρίσκουν τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής	Για την εξίσωση της υπερβολής και την εφαπτομένη της ισχύουν όσα αναφέρθηκαν και για την έλλειψη
4. ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ		
Η Μαθηματική Επαγωγή	Οι μαθητές πρέπει: Να κατανοήσουν την αποδεικτική μέθοδο της Μαθηματικής Επαγωγής Να μπορούν να χρησιμοποιούν τη Μαθηματική επαγωγή για την απόδειξη ισχυρισμών.	Θα τονισθεί ότι η αποδεικτική μέθοδος της Μαθηματικής Επαγωγής εφαρμόζεται μόνο στις περιπτώσεις που η προς απόδειξη πρόταση αναφέρεται σε φυσικούς αριθμούς. Θα χρησιμοποιηθούν κατάλληλα παραστατικά μοντέλα που θα βοηθήσουν τους μαθητές να αντιληφθούν ότι η αλήθεια του ισχυρισμού P(1) και η μετάβαση από την αλήθεια του ισχυρισμού P(ν) στην αλήθεια του ισχυρισμού P(ν+1) διασφαλίζουν την αλήθεια του ισχυρισμού για κάθε θετικό ακέραιο ν.

Η Ευκλείδεια Διαίρεση	Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν την ταυτότητα της Ευκλείδειας Διαίρεσης και να μπορούν να την αποδεικνύουν.	Για την απόδειξη της ταυτότητας της Ευκλείδειας Διαίρεσης θα χρησιμοποιηθεί η αρχή "της καλής διάταξης". Η ταυτότητα της Ευκλείδειας Διαίρεσης θα αποδειχθεί μόνο για φυσικούς αριθμούς, ενώ για τις άλλες περιπτώσεις ακεραίων θα δοθούν μόνο αριθμητικά παραδείγματα
Διαιρετότητα	Οι μαθητές πρέπει: Ναγνωρίζουν πότε λέμε ότι ένας ακέραιος β διαιρεί έναν ακέραιο α, καθώς και τις ισοδύναμες εκφράσεις του ορισμού αυτού Να γνωρίζουν και να μπορούν να αποδεικνύουν τις ιδιότητες της διαιρετότητας	Για τη διαιρετότητα να αποδειχθούν οι ιδιότητες: • Αν $\alpha \mid \beta$ και $\beta \mid \alpha$, τότε $\alpha=\beta$ ή $\alpha=-\beta$ • Αν $\alpha \mid \beta$ και $\beta \mid \gamma$, τότε $\alpha \mid \gamma$ • Αν $\alpha \mid \beta$, τότε $\alpha \mid \lambda\beta$, $\lambda \in Z$ • Αν $\alpha \mid \beta$ και $\beta \mid \gamma$, τότε $\alpha \mid (\kappa\beta+\lambda\gamma)$ • Αν $\alpha \mid \beta$, τότε $\lvert\alpha\rvert \leq \lvert\beta\rvert$
Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης	Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν την έννοια του ΜΚΔ δυο αριθμών και τις ιδιότητες του. Να γνωρίζουν πότε δυο αριθμοί λέγονται πρώτοι μεταξύ τους Να μπορούν να βρίσκουν το ΜΚΔ δυο αριθμών με τον Αλγόριθμο του Ευκκείδη. Να μπορούν να εκφράζουν το ΜΚΔ δυο αριθμών ως γραμμικό συνδυασμό των αριθμών αυτών	Θα αποδειχθεί για δυο φυσικούς α και β το βασικό θεώρημα: $(\alpha, \beta) = (\beta, \upsilon)$, όπου υ το υπόλοιπο της διαίρεσης του α με τον β. Στη συνέχεια με τη βοήθεια παραδειγμάτων θα εξηγηθεί η δυνατότητα και η μέθοδος έκφρασης του ΜΚΔ δυο αριθμών ως γραμμικού συνδυασμού των αριθμών αυτών. Θα αναφερθούν οι ιδιότητες: • Δυο ακέραιοι α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους αν και μόνο αν υπάρχουν ακέραιοι κ και λ τέτοιοι ώστε: $\kappa\alpha + \lambda\beta = 1$ • Αν διαιρέσουμε δυο ακεραίους με το ΜΚΔ τους, προκύπτουν αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους • Οι κοινοί διαιρέτες δυο ακεραίων είναι οι διαιρέτες του ΜΚΔ τους • Αν ένας ακέραιος διαιρεί το γινόμενο δυο ακεραίων και είναι πρώτος προς τον έναν, τότε διαιρεί τον άλλον

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο	Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν την έννοια του ΕΚΠ δυο αριθμών και τις ιδιότητες του. Να μπορούν να βρίσκουν το ΕΚΠ δυο ή περισσότερων ακεραίων	Για θετικούς ακεραίους θα αναφερθούν οι ιδιότητες • $\alpha\beta=(\alpha,\beta)[\alpha,\beta]$ • $[\kappa\alpha, \kappa\beta] = \kappa[\alpha, \beta]$ • $[\alpha, \beta, \gamma] = [\,[\alpha, \beta], \gamma]$ που χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό του ΕΚΠ.
Πρώτοι Αριθμοί	Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν την έννοια του πρώτου και του σύνθετου αριθμού Να μπορούν να αποδεικνύουν ότι το πλήθος των πρώτων αριθμών είναι άπειρο Να γνωρίζουν ότι κάθε θετικός ακέραιος αναλύεται κατά μοναδικό τρόπο σε γινόμενο πρώτων παραγόντων Να μπορούν να βρίσκουν το ΜΚΔ και το ΕΚΠ αριθμών που έχουν αναλυθεί σε γινόμενα πρώτων παραγόντων	Θα τονισθεί ότι η απόδειξη της ύπαρξης άπειρου πλήθους πρώτων αριθμών είναι του Ευκλείδη και αποτελεί υπόδειγμα μαθηματικής κομψότητας. Για την απάντηση στο εύλογο ερώτημα πως μπορούμε να αποφανθούμε αν ένας αριθμός είναι πρώτος ή σύνθετος θα χρησιμοποιηθεί το **κόσκινο του Ερατοσθένη** που η τεχνική του στηρίζεται στα παρακάνω θεωρήματα: • Κάθε θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 1 έχει έναν τουλάχιστον πρώτο διαιρέτη • Κάθε σύνθετος ακέραιος έχει έναν τουλάχιστον πρώτο διαιρέτη μικρότερο ή ίσο της τετραγωνικής του ρίζας. Ο προσδιορισμός του ΜΚΔ και του ΕΚΠ αριθμών που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων θα στηριχθεί μόνο στην παρατήρηση ότι ένας διαιρέτης ενός αριθμού γραμμένου στην κανονική του μορφή : $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ έχει παράγοντες μόνο από τους $p_1, p_2, ..., p_k$ και με εκθέτες ίσους ή μικρότερους των $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ και δεν θα γίνει απόδειξη της σχετικής πρότασης.
Η Διοφαντική Εξίσωση $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$	Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν την έννοια της διοφαντικής εξίσωσης και να μπορούν να αποδεικνύουν τους τύπους επίλυσης της εξίσωσης $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$	Η εύρεση μιας ειδικής λύσης της εξίσωσης που είναι απαραίτητη για τον προσδιορισμό του συνόλου των λύσεων της , μπορεί να γίνει με τη βοήθεια της γραμμικής έκφρασης του ΜΚΔ των

	Να μπορούν να επιλύουν διοφαντικές εξισώσεις της μορφής αχ + βψ = γ καθώς και προβλήματα που ανάγονται σε τέτοιες εξισώσεις.	συντελεστών α και β.
Ισοϋπόλοιποι Αριθμοί	Οι μαθητές πρέπει: Να μπορούν να εξετάζουν αν δυο ακέραιοι είναι ισοϋπόλοιποι Να γνωρίζουν και να μπορούν να αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητες των ισοϋπόλοιπων αριθμών Να χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των ισοϋπόλοιπων αριθμών στην επίλυση προβλημάτων διαιρετότητας	Μετά τον ορισμό των ισοϋπόλοιπων αριθμών, θα αποδειχθεί η ισοδυναμία $\alpha \equiv \beta (\text{mod } m) \Leftrightarrow m \mid (\alpha - \beta)$, με την οποία μπορούμε πρακτικότερα να διαπιστώσουμε αν δυο αριθμοί είναι ισοϋπόλοιποι. Στη συνέχεια θα αποδειχθούν οι ιδιότητες: Αν $\alpha \equiv \beta$ (mod m) και $\gamma \equiv \delta$ (mod m), τότε: • $\alpha+\gamma \equiv \beta+\delta (\text{mod } m)$ • $\alpha-\gamma \equiv \beta-\delta (\text{mod } m)$ • $\alpha\gamma \equiv \beta\delta (\text{mod } m)$ Η σχέση $\alpha \equiv \beta$ (mod m) θα ονομασθεί ισοτιμία και δεν θα γίνει αναφορά στην έννοια της ισοδυναμίας. Ως εφαρμογή των ιδιοτήτων της ισοτιμίας θα εξηγηθούν τα κριτήρια της διαιρετότητας των ακεραίων

III. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ωρες: 2 την εβδομάδα

Περιεχόμενα	Στόχοι	Οδηγίες
1. ΠΟΣΟΣΤΑ		
Η έννοια του ποσοστού.	Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν την έννοια του ποσοστού και να μπορούν να τη χρησιμοποιούν για τη λύση προβλημάτων.	Η κατανόηση των εννοιών θα γίνει μέσα από την πραγμάτευση πολλών εφαρμογών των ποσοστών στην καθημερινή ζωή. Οι μαθητές θα επιλύουν προβλήματα στα οποία ζητείται • να υπολογιστεί το ποσοστό των στοιχείων ενός συνόλου που περιέχεται σε ένα υποσύνολό του και αντίστροφα. • να υπολογιστεί το ποσοστό ενός άλλου ποσοστού. • να υπολογιστεί το συνολικό ποσοστό όταν δίνονται ποσοστά που αναφέρονται στο ίδιο μέγεθος κτλ.
Δείκτης εξέλιξης ενός μεγέθους	Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν την έννοια και τη σημασία του δείκτη εξέλιξης ενός μεγέθους.	Θα δοθούν πολλά προβλήματα και ασκήσεις ώστε όλοι οι μαθητές να μπορούν να βρίσκουν την τελική τιμή ενός μεγέθους που μεταβάλλεται χρησιμοποιώντας τους δείκτες εξέλιξης.
Διαδοχικές εξελίξεις ενός μεγέθους	Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν ότι ο δείκτης εξέλιξης ενός μεγέθους από την αρχική στην τελική τιμή, δίνεται ως το γινόμενο των διαδοχικών δεικτών εξέλιξης.	Με κατάλληλα προβλήματα θα γίνει η εμπέδωση του πολλαπλασιαστικού τύπου εξέλιξης.

2. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ		
Η έννοια της προσέγγισης	Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν την έννοια της προσέγγισης της τιμής ενός μεγέθους.	Θα παρουσιαστούν παρα-δείγματα προσεγγίσεων με έλλειψη και με υπεροχή. Επίσης θα δοθούν παραδείγματα τέτοια ώστε οι μαθητές γνωρίζοντας κάποιες προσεγγιστικές τιμές για μια ποσότητα, να βρίσκουν προσεγγιστικές τιμές για μια άλλη ποσότητα που εξαρτάται από την αρχική.
Απόλυτο σφάλμα	Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν την έννοια του απόλυτου σφάλματος, του ορίου του και της ακρίβειας μιας προσέγγισης.	Είναι χρήσιμο να τονιστεί μέσα από παραδείγματα ότι κατά την προσέγγιση ενός δεκαδικού αριθμού όσο περισσότερα δεκαδικά ψηφία διατηρούμε τόσο μικρότερο είναι το απόλυτο σφάλμα προσέγγισης.
Σχετικό σφάλμα.	Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν την έννοια του σχετικού σφάλματος.	Με κατάλληλα παραδείγματα οι μαθητές θα παρατηρήσουν ότι η ποιότητα μιας προσέγγισης εξαρτάται κυρίως από τη σχέση του απόλυτου σφάλματος με την αριθμητική τιμή του μεγέθους που προσεγγίζουμε.
Προσέγγιση αθροίσματος και διαφοράς.	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να βρίσκουν την προσεγγιστική τιμή και την ακρίβεια της προσέγγισης ενός αθροίσματος και μιας διαφοράς.	Θα τονιστεί ότι όταν αφαιρούμε "κοντινές" προσεγγιστικές τιμές είναι δυνατόν να έχουμε σημαντική απώλεια της ακρίβειας.
Προσέγγιση γινομένου και πηλίκου.	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να βρίσκουν την προσεγγιστική τιμή και την ακρίβεια της προσέγγισης ενός γινομένου και ενός πηλίκου.	Θα δοθούν στους μαθητές κατάλληλα παραδείγματα ώστε να εμπεδώσουν τις έννοιες αυτές.

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ-ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ		
Η έννοια του διανύσματος Ισα διανύσματα	Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν την έννοια του διανύσματος, τους σχετικούς ορισμούς και την ορολογία.	Θα αναφερθούν τα διανυσματικά μεγέθη σε αντιδιαστολή με τα βαθμωτά. Η έννοια του διανύσματος προκύπτει με άμεσο τρόπο από την ανάγκη για την παράσταση μεγεθών, όπως είναι η ταχύτητα, η δύναμη, η μετατόπιση κτλ. που δεν καθορίζονται μόνο με την αριθμητική τιμή και τη μονάδα μέτρησής τους. Το διάνυσμα θα παρουσιαστεί ως ένα προσανατολισμένο ευθ. τμήμα και δεν θα γίνει αναφορά στα ελεύθερα ή εφαρμοστά διανύσματα.
Πραξεις διανυσμάτων-Ιδιότητες	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να προσθέτουν και να αφαιρούν διανύσματα, να πολλαπλασιάζουν ένα διάνυσμα με ένα πραγματικό αριθμό και να γνωρίζουν τις ιδιότητες των πράξεων αυτών. Να γνωρίσουν τη σχέση που υπάρχει μεταξύ συγγραμμικών διανυσμάτων	Οι πράξεις παρουσιάζονται με τη βοήθεια της γεωμετρικής εποπτείας και τονίζεται ιδιαίτερα ότι ένα οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{AB}$ μπορεί να γραφεί ως διαφορά $\vec{OB}-\vec{OA}$, όπου O είναι ένα οποιοδήποτε σημείο
Διάνυσμα θέσης	Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν το διάνυσμα θέσης ενός σημείου στο επίπεδο	Θα ζητηθεί από τους μαθητές να εκφράσουν ένα οποιο-δήποτε διάνυσμα ως συνάρτηση των διανυσμάτων θέσης των άκρων του. Επίσης θα ζητηθεί από τους μαθητές να εκφράσουν το διάνυσμα θέσης του μέσου ενός τμήματος με τη βοήθεια των διανυσμάτων θέσης των άκρων του.
Γωνία δύο διανυσμάτων	Οι μαθητές πρέπει να	Ως γωνία δύο διανυσμάτων

	γνωρίσουν πως ορίζεται η γωνία δύο διανυσμάτων	ορίζουμε την **κυρτή** γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα θέσης τους.
Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων	Οι μαθητές πρέπει να γνωρίσουν το γραμμικό συνδυασμό δια- νυσμάτων και τη σπουδαιότητά του.	Με κατάλληλα παραδείγματα θα κατανοήσουν οι μαθητές ότι με τη βοήθεια δύο **μη συγγραμμικών** διανυσμάτων μπορεί να εκφραστεί μονοσήμαντα ένα οποιοδήποτε διάνυσμα του επιπέδου που ορίζουν αυτά.
Συντεταγμένες διανύσματος στο επίπεδο.	Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν ότι κάθε διάνυσμα γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των μοναδιαίων διανυσμάτων των αξόνων.	Θα τονιστεί η ισοδυναμία των προτάσεων για το διάνυσμα θέσης του Α: $O\vec{A} = x\mathrm{i} + y\mathrm{j} \Leftrightarrow A$ είναι το σημείο με συντεταγμένες (x,y).
	Να μπορούν να βρίσκουν τις συντεταγμένες διανύσματος στο επίπεδο και τις συντεταγμένες ενός γραμμικού συνδυασμού διανυσμάτων.	Είναι χρήσιμο να βρεθεί το διάνυσμα θέσης του σημείου που χωρίζει το ευθ. τμήμα AB εσωτερικά σε λόγο $\frac{\mu}{\nu}$, με τη βοήθεια των διανυσμάτων θέσης των σημείων A,B.
	Να μπορούν να βρίσκουν τις συντεταγμένες διανύσματος όταν είναι γνωστές οι συντεταγμένες των άκρων του και στη συνέχεια το μέτρο του διανύσματος.	
	Να κατανοήσουν την ικανή και αναγκαία συνθήκη παραλληλίας δύο διανυσμάτων και να την εκφράζουν με τη βοήθεια των συντεταγμένων τους.	Να αποδειχτεί η πρόταση: Δύο διανύσματα $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ είναι παράλληλα αν και μόνο αν, $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$. Η συνθήκη αυτή ισχύει σε όλες τις περιπτώσεις διανυσμάτων ενός επιπέδου. Θα επισημανθεί επίσης ότι

		δύο διανύσματα είναι παράλληλα, όταν έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης.
Βαρύκεντρο	Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν την έννοια του βαρύκεντρου ενός σώματος και να μπορούν να βρίσκουν τη θέση του	Θα υπολογιστεί πρώτα το κέντρο βάρους συστήματος δύο ή τριών σωματιδίων στο επίπεδο. Θα αναφερθεί ότι η συμμετρία του σώματος καθορίζει και τη θέση του κέντρου βάρους του. Τέλος θα υπολογίζεται η θέση του κέντρου βάρους σώματος χωρίζοντάς το σε τμήματα των οποίων η θέση του κέντρου βάρους είναι γνωστή από τη συμμετρία.
Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων	Οι μαθητές πρέπει να γνωρίσουν την έννοια του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων και να μπορούν να αποδεικνύουν τις βασικές του ιδιότητές.	Από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων προκύπτει αμέσως η αντιμεταθετική ιδιότητα και η συνθήκη καθετότητας δύο διανυσμάτων.
	Να μπορούν να βρίσκουν το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων όταν δίδονται οι συντεταγμένες τους.	Θα υπολογιστεί η γωνία δύο διανυσμάτων με τη βοήθεια του εσωτερικού γινομένου τους καθώς και η προβολή ενός διανύσματος επάνω σε άλλο.
	Να γνωρίσουν την ικανή και αναγκαία συνθήκη της καθετότητας δύο διανυσμά των.	
Η ευθεία	Οι μαθητές πρέπει να γνωρίσουν τις διάφορες μορφές εξίσωσης μιας ευθείας: • διανυσματική, • παραμετρικές εξισώσεις • καρτεσιανή.	Οι μαθητές γνωρίζουν την Καρτεσιανή μορφή μιας ευθείας από προηγούμενες τάξεις. Εδώ λοιπόν θα πρέπει να γίνει φανερή η ισοδυναμία των τριών μορφών. Επίσης θα βρούν τη θέση δύο ευθειών στο χώρο όταν δίνονται οι εξισώσεις τους.

4. ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ	Οι μαθητές πρέπει να γνωρίσουν τις βασικές ιδιότητες των κωνικών τομών λόγω των πρακτικών και θεωρητικών εφαρμογών τους.	
Κύκλος	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να βρίσκουν την εξίσωση ενός κύκλου με κέντρο το σημείο (x_0, y_0) και ακτίνα ρ. Να μπορούν να βρίσκουν τη θέση μιας ευθείας και ενός κύκλου.	Με κατάλληλα παραδείγματα θα παρατηρήσουν ότι μια εξίσωση της μορφής: $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ δεν είναι πάντα εξίσωση κύκλου. Η σχετική θέση μιας ευθείας και ενός κύκλου θα βρεθεί από τη λύση του συστήματος των εξισώσεών τους. Έτσι η ευθεία τέμνει τον κύκλο αν το σύστημα έχει δύο λύσεις, εφάπτεται σ' αυτόν αν έχει μοναδική λύση και δεν έχει κανένα κοινό σημείο αν είναι αδύνατο.
Παραβολή	Οι μαθητές πρέπει να γνωρίσουν τον ορισμό της παραβολής και να μπορούν να βρίσκουν την εξίσωσή της. Να γνωρίσουν και να μπορούν να βρίσκουν τις ιδιότητες της παραβολής που προκύπτουν από την εξίσωσή της.	Ανάλογα θα ζητηθεί από τους μαθητές να βρούν τη θέση δύο κύκλων. Η εφαπτομένη μιας παραβολής σε ένα σημείο της, θα βρεθεί όπως και στον κύκλο από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων της παραβολής και της ευθείας. Θα τονιστεί η ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής για τις εφαρμογές της.
Ελλειψη-Υπερβολή	Οι μαθητές πρέπει να γνωρίσουν τον ορισμό της έλλειψης, της υπερβολής και	Για την εύρεση της εξίσωσης της εφαπτομένης μιας έλλειψης ή μιας υπερβολής σε ένα σημείο

	τις εξισώσεις τους.	τους θα εργαστούν οι μαθητές όπως και στην παραβολή.
	Να γνωρίσουν και να μπορούν να βρίσκουν τις ιδιότητες της έλλειψης και της υπερβολής που προκύπτουν από τις εξισώσεις τους.	Θα εξηγηθεί η σημασία που έχει για το σχήμα της έλλειψης και της υπερβολής η εκκεντρότητά της.
	Να γνωρίσουν και να βρίσκουν τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της υπερβολής.	Θα αναφερθεί η ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης και της υπερβολής.
5.ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ BOOLE		
Λογικά κυκλώματα και Αλγεβρα Boole.	Οι μαθητές πρέπει να αναγνωρίσουν τα δύο βασικά κυκλώματα της σύνδεσης σε σειρά και της παράλληλης σύνδεσης. Να κατασκευάσουν πίνακες αλήθειας για απλά κυκλώματα. Να βρίσκουν τις λογικές παραστάσεις που περιγράφουν κυκλώματα τα οποία προκύπτουν με συνδυασμούς παράλληλης και σε σειρά σύνδεσης. Να μπορούν, χρησιμοποιώντας πίνακες αλήθειας, να βρίσκουν τη λογική παράσταση που περιγράφει ένα δεδομένο κύκλωμα. Να απλοποιούν σύνθετες παραστάσεις κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της Άλγεβρας Boole.	Στο κεφάλαιο αυτό εισάγεται μια δίτιμη Άλγεβρα **Boole** γνωστή ως **Άλγεβρα διακοπτών**. Στην αρχή περιγράφεται η κατάσταση ενός απλού διακόπτη με τη χρήση μιας δίτιμης μεταβλητής p που παίρνει τις τιμές 0 ή 1. Στη συνέχεια συνδέοντας μεταξύ τους διακόπτες με διάφορους τρόπους, σχηματί ζονται σύνθετα κυκλώματα και δείχνεται πώς μπορούν να σχηματιστούν οι αντίστοι χη πίνακες αληθείας. Τέλος, με τη βοήθεια των τριών βασικών λογικών πράξεων (για τις οποίες χρησιμο-ποιούνται τα σύμβολα +, ·, και ′) δημιουργούνται σύνθετες λογικές παραστά σεις που περιγράφουν κυκλώματα διακοπτών.

Δ. Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά της

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ι. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής Ώρες : 2 την εβδομάδα

Περιεχόμενα	**Στόχοι**	**Οδηγίες**
1. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ		
Η έννοια της Παραγώγου	Οι μαθητές πρέπει: • Να γνωρίζουν πως ορίζεται η παράγωγος μιας συνάρτησης σε ένα σημείο της και να μπορούν να την υπολογίζουν Να γνωρίζουν τη γεωμετρική σημασία της παραγώγου.	Με κατάλληλα παραδείγματα, όπως είναι ο ορισμός της στιγμιαίας ταχύτητας, θα γίνει εισαγωγή της έννοιας της παραγώγου μιας συνάρτησης, χωρίς να προηγηθεί ο αυστηρός ορισμός του ορίου συνάρτησης. Υπενθυμίζεται ότι η έννοια του ορίου έχει ήδη εισαχθεί με ενορατικό τρόπο στην Α΄ Λυκείου με την ευκαιρία της μελέτης των συναρτήσεων $f(x)=x^2$ και $f(x)=\frac{1}{x}$ Σε όλη την ανάπτυξη της ενότητας θα κυριαρχεί η γεωμετρική εποπτεία και η αναφορά στο ρυθμό μεταβολής.
Η παράγωγος συνάρτηση	Οι μαθητές πρέπει: • Να μπορούν να υπολογίζουν τις παραγώγους βασικών συναρτήσεων • Να μπορούν να υπολογίζουν τις παραγώγους συναρτήσεων με τη βοήθεια των κανόνων παραγώγισης	Με εφαρμογή του ορισμού θα βρεθεί η παράγωγος της σταθερής και της ταυτοτικής συνάρτησης. Στη συνέχεια θα αποδειχτεί ότι $(x^{\rho})=\rho(x^{\rho-1})$ $\rho=2,3,-1,-2$ και θα γενικευθεί χωρίς απόδειξη ο τύπος παραγώγισης δύναμης με οποιονδήποτε εκθέτη. Επίσης χωρίς απόδειξη θα αναφερθούν και οι τύποι:

		(ημχ)′= συνχ, (συνχ)′ = -ημχ, $(e^x)'=e^x$ και $(\ln x)'=\frac{1}{x}$. Με τη βοήθεια κατάλληλων παραδειγμάτων θα διατυπωθούν οι κανόνες παραγώγισης: αθροίσματος, γινομένου, πηλίκου και σύνθεσης συναρτήσεων.
Μελέτη Συνάρτησης	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: • Να μελετούν μια συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα • Να λύνουν προβλήματα μεγίστων και ελαχίστων	Δεν θα αποδειχθούν τα κριτήρια μονοτονίας και ακρότατων μιας συνάρτησης. Με κατάλληλα όμως παραδείγματα θα εξηγηθεί εποπτικά η σχέση του προσήμου και των ριζών της της παραγώγου μιας συνάρτησης με τη μονοτονία και τα ακρότατα.. Θα γίνει μελέτη συναρτήσεων και επίλυση προβλημάτων μεγίστων και ελαχίστων από τα οποία θα διαπιστώσουν οι μαθητές ότι οι παράγωγοι είναι ένα πολύτιμο εργαλείο για την αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων.
2. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ		
Βασικές Έννοιες Κατανομές Συχνοτήτων	Οι μαθητές πρέπει: • Να γνωρίζουν τις βασικές έννοιες της Στατιστικής και να χρησιμοποιούν σωστά τη σχετική ορολογία. • Να μπορούν να κατασκευάζουν πίνακες κατανομής συχνοτήτων	Με κατάλληλα παραδείγματα θα παρουσιαστούν οι έννοιες: • Πληθυσμός • Απογραφή • Δείγμα • Δεδομένα • Μεταβλητές • Κατανομή Συχνοτήτων
Γραφικές Παραστάσεις	Οι μαθητές πρέπει: • Να γνωρίζουν τις διάφορες μορφές των γραφικών παραστάσεων κατανομών συχνοτήτων	Θα ασκηθούν οι μαθητές στην κατασκευή και στην ανάγνωση • Ραβδογράμματος • Κυκλικού Διαγράμματος • Εικονογράμματος

	• Να μπορούν να παριστάνουν γραφικά μια κατανομή συχνοτήτων	• Ιστογράμματος • Πολυγώνου Συχνοτήτων Με κατάλληλα παραδείγματα θα κατανοήσουν οι μαθητές την ανάγκη ομαδοποίησης των δεδομένων και θα επισημανθεί ο κίνδυνος πλάνης από λανθασμένες ή ελλιπείς γραφικές παραστάσεις.
Παράμετροι Θέσεως και Διασποράς	Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν και να μπορούν να υπολογίζουν : • Τις παραμέτρους θέσεως μιας κατανομής συχνοτήτων • Τις παραμέτρους διασποράς μιας κατανομής συχνοτήτων	Από τα μέτρα θέσεως θα αναφερθούν οι παράμετροι: • μέση τιμή • επικρατούσα τιμή • διάμεσος • ποσοστημόρια ενώ από τα μέτρα διασποράς οι παράμετροι: • εύρος • ενδοτεταρτημοριακή απόκλιση • μέση απόκλιση • διακύμανση • τυπική απόκλιση Θα αναφερθούν οι βασικές ιδιότητες των μέτρων θέσεως και διασποράς και θα επιλυθούν προβλήματα σύγκρισης δυο κατανομών συχνοτήτων με τη βοήθεια των παραμέτρων. Επίσης θα αναφερθούν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα που παρουσιάζει η χρήση κάθε παραμέτρου.
Συντελεστής Συσχέτισης και Παλινδρόμηση δυο μεταβλητών	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: • Να βρίσκουν το συντελεστή συσχέτισης δυο μεταβλητών και να γνωρίζουν τη σημασία του. • Να βρίσκουν την ευθεία παλινδρόμησης μιας διπαραμετρικής κατανομής	Με κατάλληλα παραδείγματα θα εισαχθεί η έννοια του συντελεστή συσχέτισης και θα εξηγηθεί η σημασία του ως μέτρου της συσχέτισης δυο μεταβλητών. Αφού ορισθούν με κατάλληλα παραδείγματα οι δυο γραμμές παλινδρόμησης μιας διπαραμετρικής κατανομής, θα παρουσιασθεί η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων.

3. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗΣ	Οι μαθητές πρέπει: • Να γνωρίζουν τη **βασική αρχή απαρίθμησης** και να μπορούν να τη χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων. • Να γνωρίζουν την έννοια του **συνδυασμού** και να μπορούν να τη χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων.	Στα στοιχεία Συνδυαστικής αναφέρονται οι βασικές έννοιες που είναι απαραίτητες για την επίλυση προβλημάτων απαρίθμησης δηλαδή προβλημάτων στα οποία τίθεται το ερώτημα "πόσα " ή με "πόσους τρόπους". Το κυρίαρχο εργαλείο για τη λύση των προβλημάτων θα είναι η βασική αρχή απαρίθμησης, της οποίας άμεση εφαρμογή είναι ο υπολογισμός του πλήθους των διατάξεων και των μεταθέσεων. Θα αποδειχθεί ο τύπος που εκφράζει το πλήθος των συνδυασμών.
4. .ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ	Οι μαθητές πρέπει: • Να γνωρίζουν τις βασικές έννοιες των πιθανοτήτων και να χρησιμοποιούν με σωστό τρόπο τη σχετική ορολογία. • Να γνωρίζουν τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων και να μπορούν να τον χρησιμοποιούν. • Να γνωρίζουν τη δεσμευμένη πιθανότητα και την έννοια των ανεξάρτητων ενδεχομένων • Να γνωρίζουν τον πολλαπλασιαστικό νόμο των πιθανοτήτων και να τον χρησιμοποιούν στον υπολογισμό πιθανοτήτων	Οι μαθητές θα ασκηθούν στις διάφορες τεχνικές προσδιορισμού του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης και στην απαρίθμηση των στοιχείων του. Θα αναφερθούν μόνο παραδείγματα που ο δειγματικός τους χώρος είναι πεπερασμένος. Θα γίνει επανάληψη των πράξεων των συνόλων και με τη βοήθεια διαγραμμάτων Venn θα ασκηθούν οι μαθητές στη συμβολική και γραφική έκφραση των πράξεων των ενδεχομένων. Στον ορισμό της έννοιας της πιθανότητας ενός ενδεχομένου θα τηρηθεί η σειρά με την οποία ιστορικά εξελίχθηκε η έννοια αυτή.

		Δεν θα δοθεί ο αυστηρός ορισμός της πιθανότητας ενός ενδεχομένου. Θα τονισθεί όμως ότι οι θετικοί αριθμοί $p_1, p_2, ..., p_\nu$ με $\sum p_i = 1$ μπορούν να θεωρηθούν ως μια κατανομή πιθανότητας ενός πεπερασμένου δειγματικού χώρου με ν στοιχεία. Θα τονισθεί ότι αν σε ένα πείραμα τύχης είναι δεδομένο ότι έχει πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α, τότε ο αρχικός δειγματικός χώρος Ω περιορίζεται στο Α. Δυο ενδεχόμενα θα λέγονται ανεξάρτητα όταν η πραγματοποίησης ή μη του ενός δεν επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης ή μη του άλλου. Να χρησιμοποιηθεί το δεντροδιάγραμμα για τον υπολογισμό της πιθανότητας ενδεχομένων.

ΙΙ. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Ωρες: 5 την εβδομάδα

Περιεχόμενα	**Στόχοι**	**Οδηγίες**
1. ΠΙΝΑΚΕΣ		
Η έννοια του πίνακα Πράξεις με πίνακες	Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν την έννοια, το συμβολισμό των στοιχείων του και τη χρησιμότητα ενός πίνακα	Η εισαγωγή στην έννοια του πίνακα θα γίνει με τη βοήθεια παραδειγμάτων από τα Μαθηματικά, τις άλλες επιστήμες και την καθημερινή ζωή.
	Να μπορούν να κάνουν πράξεις με πίνακες και να γνωρίζουν τις ιδιότητες των πινάκων.	Θα διδαχθούν οι πράξεις: Πρόσθεση πινάκων, γινόμενο αριθμού με πίνακα, πολλαπλασιασμός πινάκων και θα βρεθεί με τη βοήθεια του ορισμού ο αντίστροφος ενός 2×2 πίνακα. Θα τονιστούν οι συνθήκες για να μπορούν να εκτελεστούν οι πράξεις μεταξύ πινάκων. Στις πράξεις των πινάκων θα δοθεί έμφαση στην τεχνική της εκτέλεσής τους και όχι στις ιδιότητες που καθορίζουν την αλγεβρική δομή τους. Θα τονιστεί, όπου υπάρχει, η αναλογία των ιδιοτήτων των πράξεων των πινάκων με εκείνες των πραγματικών αριθμών. Τέλος θα τονιστεί η χρησιμότητα των πινάκων στην επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής, καθώς επίσης και προβλημάτων άλλων επιστημών, όπως η Οικονομία, η Γενετική, η Επιστήμη των Υπολογιστών, η θεωρία Παιγνίων, Γραφημάτων κτλ.
2. ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ		
Επίλυση γραμμικών συστημάτων	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: Να γράφουν ένα γραμμικό σύστημα στη μορφή $AX = B$ και να το επιλύουν με τη μέθοδο	Τα γραμμικά συστήματα εφαρμόζονται στη λύση ενός μεγάλου κύκλου προβλημάτων όχι μόνο από τα μαθηματικά

	του Gauss. Να μπορούν να αποφανθούν με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss αν ένας τετραγωνικός πίνακας αντιστρέφεται και να βρίσκουν τον αντίστροφό του. Να γνωρίζουν την έννοια της ορίζουσας και τον τρόπο υπολογισμού της. Να επιλύουν γραμμικά συστήματα με τον κανόνα του Crammer	(Αναλυτική Γεωμετρία , Διαφορικές Εξισώσεις) αλλά και από τις άλλες επιστήμες όπως είναι η Οικονομία, η Μηχανική κτλ. Η επίλυση γραμμικών συστημάτων 2x2 και 3x3 έχει ήδη μελετηθεί στην Α΄ Λυκείου. Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται επέκταση στην επίλυση γραμμικών συστημάτων με οποιοδήποτε αριθμό εξισώσεων ή αγνώστων. Κύριο εργαλείο της επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος αποτελεί η μέθοδος του Gauss η οποία εφαρμόζεται καλύτερα με τη μέθοδο του επαυξημένου πίνακα. Η μέθοδος αυτή πρέπει να προβληθεί ως η πιο αποδοτική μέθοδος δεδομένου ότι είναι προσαρμόσιμη σε πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή. Θα αποδειχθεί ότι η ορίζουσα του γινομένου δυο πινάκων 2x2 είναι ίση με το γινόμενο των οριζουσών των πινάκων αυτών. Επίσης θα αποδειχτεί ότι ένας 2x2 πίνακας αντιστρέφεται αν και μόνο αν η ορίζουσά του είναι διαφορετική από το μηδέν και το συμπέρασμα θα γενικευθεί χωρίς απόδειξη, για νxν πίνακες. Η διδασκαλία θα περιοριστεί σε ορίζουσες 2x2 και 3x3.
Μετασχηματισμοί στο επίπεδο με τη βοήθεια πινάκων	Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν την έννοια του γεωμετρικού μετασχηματισμού και ειδικότερα του γραμμικού μετασχηματισμού στο επίπεδο. Να βρίσκουν με τη βοήθεια πινάκων τις εικόνες των σημείων του επιπέδου μέσω ενός μετασχηματισμού στις περιπτώσεις της μεταφοράς της στροφής και των συμμετριών ως προς τους άξονες $x'x$, $y'y$ και τη διχοτόμο $y=x$.	Ως εφαρμογή θα μελετηθεί η εξίσωση $y=\frac{1}{x}$ και γενικότερα η εξίσωση $Ax^2+By^2+2\Gamma xy+\Delta x+Ey+Z=0$. Θα ζητείται η εύρεση της εικόνας ενός ευθυγράμμου τμήματος ή μιας κωνικής τομής μέσω ενός μετασχηματισμού όταν δίνεται ο πίνακας μετασχηματισμού αυτού.

3. ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ		
Η Εννοια του Μιγαδικού Αριθμού	Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν την έννοια του μιγαδικού αριθμού Να γνωρίζουν πότε δυο μιγαδικοί είναι ίσοι Να μπορούν να παριστάνουν ένα μιγαδικό αριθμό στο μιγαδικό επίπεδο	Το σύνολο C των μιγαδικών αριθμών ορίζεται ως ένα υπερσύνολο του συνόλου R των πραγματικών αριθμών στο οποίο: • επεκτείνονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού έτσι ώστε να έχουν τις ίδιες ιδιότητες όπως στο R, με το 0 και το 1 να είναι τα ουδέτερα στοιχεία της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αντιστοίχως • Υπάρχει στοιχείο i τέτοιο ώστε $i^2 = -1$ • Κάθε στοιχείο z του C γράφεται κατά μοναδικό τρόπο με τη μορφή $z = \alpha + \beta i$, $\alpha,\beta \in R$
Πράξεις στο Σύνολο των Μιγαδικών	Οι μαθητές πρέπει: Να μπορούν να προσθέτουν και να αφαιρούν μιγαδικούς αριθμούς και να παριστάνουν γεωμετρικά το άθροισμα και τη διαφορά δυο μιγαδικών	Στις πράξεις των μιγαδικών αριθμών θα δοθεί έμφαση στην τεχνική της εκτέλεσης τους και στη γεωμετρική τους ερμηνεία και όχι στις ιδιότητες που καθορίζουν τη δομή ενός σώματος.
	Να μπορούν να πολλαπλασιάζουν και να διαιρούν μιγαδικούς αριθμούς	Οι δυνάμεις με ακέραιο εκθέτη, ορίζονται στο C όπως και οι δυνάμεις στο R.
	Να μπορούν να υπολογίζουν τις δυνάμεις του i	Οι δυνάμεις i^ν υπολογίζονται λαμβάνοντας υπόψη το υπόλοιπο της διαίρεσης του ν

		με το 4.
	Να γνωρίζουν τον ορισμό και τις ιδιότητες των συζυγών μιγαδικών Να μπορούν να επιλύουν εξισώσεις 2ου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές και με αρνητική διακρίνουσα	Θα τονισθεί ότι οι ρίζες μιας εξίσωσης 2ου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές και με αρνητική διακρίνουσα είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.
Μέτρο Μιγαδικού Αριθμού	Οι μαθητές πρέπει: Να μπορούν να υπολογίζουν το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού Να γνωρίζουν τις ιδιότητες του μέτρου και να μπορούν να τις χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων γεωμετρικών τόπων στο μιγαδικό επίπεδο	Για το μέτρο να αναφερθούν οι ιδιότητες: $\lvert z\rvert = \lvert\bar{z}\rvert = \lvert -z\rvert$, $\lvert z\rvert^2 = z\cdot\bar{z}$, $\lvert z_1\cdot z_2\rvert = \lvert z_1\rvert\cdot\lvert z_2\rvert$, $\left\lvert\frac{z_1}{z_2}\right\rvert = \frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$ και $\big\lvert\lvert z_1\rvert - \lvert z_2\rvert\big\rvert \le \lvert z_1 + z_2\rvert \le \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert$ Ιδιαίτερη αναφορά θα γίνει στο γεγονός ότι το μέτρο της διαφοράς δυο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.
Τριγωνομετρική Μορφή Μιγαδικού	Οι μαθητές πρέπει: Να μπορούν να βρίσκουν την τριγωνομετρική μορφή ενός μιγαδικού αριθμού Να γνωρίζουν πότε δυο μιγαδικοί γραμμένοι με τριγωνομετρική μορφή είναι ίσοι	Ως όρισμα ενός μιγαδικού αριθμού θα ορισθεί μια από τις γωνίες με αρχική πλευρά την ημιευθεία Οχ και τελική την ημιευθεία ΟΡ, όπου Ρ η εικόνα του μιγαδικού αριθμού.
	Να μπορούν να πολλαπλασιάζουν και να διαιρούν μιγαδικούς που είναι γραμμένοι με τριγωνομετρική μορφή	Θα αποδειχθούν οι κανόνες πολλαπλασιασμού και διαίρεσης μιγαδικών με τριγωνομετρική μορφή.
	Να γνωρίζουν το θεώρημα De Moivre και να μπορούν να το χρησιμοποιούν για τον υπολογισμό δυνάμεων μιγαδικών αριθμών	Για την απόδειξη του θεωρήματος του De Moivre θα χρησιμοποιηθεί η μαθηματική επαγωγή.
Πολυωνυμικές Εξισώσεις στο C	Οι μαθητές πρέπει: Να μπορούν να επιλύουν εξισώσεις της μορφής $z^{\nu} = 1$, $\nu \in N$	Αν $a = \left(\sqrt[\nu]{\rho}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{\nu} + i\eta\mu\frac{\theta}{\nu}\right)\right)^{\nu} = w^{\nu}$ τότε η εξίσωση $z^{\nu} = a$ γράφεται

	Να μπορούν να επιλύουν εξισώσεις της μορφής $z^{v} = a$, $v \in N$, $a \in C$ Να γνωρίζουν το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας Να γνωρίζουν και να μπορούν να αποδεικνύουν ότι οι μιγαδικές ρίζες μιας πολυωνυμικής εξίσωσης με πραγματικούς συντελεστές είναι συζυγείς	$\left(\frac{z}{w}\right)^{v}=1$ και η επίλυση της ανάγεται στην επίλυση της εξίσωσης $z^{v}=1$. Θα τονισθεί ιδιαίτερα η γεωμετρική ερμηνεία των λύσεων της εξίσωσης $z^{v} = a$.

4. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ		
Έννοια συνάρτησης	Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν τον ορισμό και το συμβολισμό της συνάρτησης Να μπορούν να βρίσκουν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης όταν δίνεται ο τύπος της και να γνωρίζουν πότε δυο συναρτήσεις είναι ίσες. Να μπορούν να βρίσκουν το άθροισμα, το γινόμενο, το πηλίκο και τη σύνθεση απλών συναρτήσεων	Η σύνθεση συναρτήσεων θα εισαχθεί με παραδείγματα. Επισημαίνεται ότι για την κατανόηση της έννοιας της σύνθεσης συναρτήσεων και την αξιοποίησή της αργότερα είναι αρκετά μερικά απλά παραδείγματα
Οριο συνάρτησης	Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν την έννοια του ορίου συνάρτησης και τις ιδιότητες των ορίων. Να γνωρίζουν την έννοια της οριζόντιας και της κατακόρυφης ασύμπτωτης. Να μπορούν να βρίσκουν τα όρια απλών συναρτήσεων.	Η προσέγγιση στην έννοια του ορίου θα γίνει εποπτικά. Δεν θα αναφερθεί ο ε- ορισμός. Με κατάλληλα παραδείγματα θα εισαχθεί η έννοια της κατακόρυφης και της οριζόντιας ασύμπτωτης. Επίσης θα διδαχθούν χωρίς απόδειξη οι ιδιότητες που αναφέρονται: • Στο όριο και τη διάταξη • Στο όριο και τις πράξεις • Στο κριτήριο παρεμβολής και ως εφαρμογή θα υπολογιστούν τα όρια : $\lim_{x \to x_0} \eta\mu x$, $\lim_{x \to x_0} \sigma\upsilon\nu x$

	-	και $\lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x}$ Επισημαίνεται ότι η διδασκαλία του ορίου δεν είναι αυτοσκοπός, αλλά στοχεύει στην προετοιμασία για την εισαγωγή της παραγώγου και του ολοκληρώματος. Γι'αυτό πρέπει να αποφευχθεί η άσκοπη «ασκησιολογία» που θα καθυστερήσει την έγκαιρη εισαγωγή των μαθητών στην παράγωγο και το ολοκλήρωμα.
Συνέχεια συνάρτησης	Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν: Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Τις ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων και τις βασικές συνεχείς συναρτήσεις Τις ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων σε κλειστό διάστημα.	Η έννοια της συνέχειας θα εξηγηθεί πρώτα εποπτικά και ακολούθως θα δοθεί ο μαθηματικός ορισμός της. Επισημαίνεται ότι αντικείμενο της μελέτης μιας συνάρτησης είναι συναρτήσεις που ορίζονται σε διάστημα ή ένωση διαστημάτων. Γι'αυτό δεν εξετάζεται η συνέχεια μιας συνάρτησης σε μεμονωμένο σημείο. Τα θεωρήματα του Bolzano και μέγιστης και ελάχιστης τιμής θα εξηγηθούν εποπτικά και θα αποδειχθεί το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής. Τα θεωρήματα αυτά θα χρησιμοποιηθούν για τη διαπίστωση της ύπαρξης ρίζας της εξίσωσης f(x)=0, τη μελέτη του προσήμου και τον προσδιορισμό του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης.
Εκθετική και Λογαριθμική Συνάρτηση	Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν τις ιδιότητες της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης και να μπορούν να σχεδιάζουν τις γραφικές τους παραστάσεις.	Οι μαθητές έχουν διδαχθεί σε προηγούμενες τάξεις την έννοια της εκθετικής συνάρτησης και την έννοια της λογαριθμικής συνάρτησης με βάση το 10 και τον αριθμό e. Εδώ θα γίνει αυστηρότερη εισαγωγή της λογαριθμικής συνάρτησης, η οποία και θα παρουσιαστεί ως αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης. Επισημαίνεται ότι η διδασκαλία της αντίστροφης συνάρτησης δεν αποτελεί αυτοσκοπό. Η έννοια

		της αντίστροφης εισάγεται για να διευκολύνει την κατανόηση της λογαριθμικής συνάρτησης και τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων.
5. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ		Μεγάλο μέρος από την ενότητα της παραγώγου το έχουν διδαχθεί οι μαθητές στα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας. Εδώ θα γίνει συστηματικότερη και αυστηρότερη επεξεργασία των διαφόρων εννοιών και θα παρουσιαστούν πιο σύνθετες εφαρμογές.
Εννοια της παραγώγου	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: Να βρίσκουν την παράγωγο μιας συνάρτησης σε ένα σημείο της με τη βοήθεια του ορισμού. Να βρίσκουν την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα σημείο της.	Θα χρησιμοποιηθούν τόσο ο συμβολισμός $f'(x_0)$ του Lagrange όσο και ο συμβολισμός $\left.\frac{df(x)}{dx}\right\|_{x=x_0}$ του Leibnitz. Ιδιαίτερη σημασία θα δοθεί στην κατανόηση των εννοιών «οριακό κόστος», «στιγμιαία ταχύτητα», και «στιγμιαία επιτάχυνση».
Παράγωγος συνάρτησης	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: Να υπολογίζουν τις παραγώγους των βασικών συναρτήσεων. Να υπολογίζουν τις παραγώγους συναρτήσεων χρησιμοποιώντας τους κανόνες παραγώγισης. Να επιλύουν προβλήματα ρυθμού μεταβολής	Θα αναφερθεί , χωρίς θεωρητική θεμελίωση και ο κανόνας παραγώγισης πεπλεγμένης συνάρτησης και θα χρησιμοποιηθεί σε διάφορες εφαρμογές, όπως για παράδειγμα, στον προσδιορισμό του συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης του κύκλου ή της έλλειψης σε ένα σημείο τους.
Μελέτη συνάρτησης	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν: Να μελετούν μια συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Να μελετούν μια συνάρτηση ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. Να υπολογίζουν όρια με τους κανόνες De 'La Hospital. Να βρίσκουν τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.	Με τη μελέτη συνάρτησης υλοποιείται ο σημαντικότερος στόχος της διδασκαλίας της ενότητας των παραγώγων. Τα θεωρήματα Rolle και μέσης τιμής θα παρουσιαστούν και θα εξηγηθούν γεωμετρικά, ενώ θα αποδειχθεί το θεώρημα του Fermat. Θα προσδιοριστούν και οι ασύμπτωτες της υπερβολής. Θα δοθούν πραγματικά προβλήματα στα οποία θα

	Να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης. Να επιλύουν προβλήματα μεγίστων και ελαχίστων.	ζητείται το μέγιστο ή το ελάχιστο μιας συνάρτησης. Επισημαίνεται ότι για μια συνεχή συνάρτηση το πρόσημο της παραγώγου της σε ανοικτό διάστημα είναι αρκετό για να προσδιοριστεί η μονοτονία και στο αντίστοιχο κλειστό διάστημα.
6.ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ		
Αρχική Συνάρτηση Αόριστο Ολοκλήρωμα	Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν την έννοια της παράγουσας ή αρχικής συνάρτησης και την έννοια του αόριστου ολοκληρώματος. Να μπορούν να υπολογίζουν απλά αόριστα ολοκληρώματα με τη βοήθεια των μεθόδων ολοκλήρωσης	Εδώ ορίζεται πρώτα η αρχική συνάρτηση και το αόριστο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης και στη συνέχεια εισάγεται η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος με το πρόβλημα του υπολογισμού του εμβαδού ενός παραβολικού χωρίου. Ο τρόπος αυτός εισαγωγής του ολοκληρώματος, μολονότι δε συμφωνεί με την ιστορική εξέλιξη της έννοιας του ολοκληρώματος, εξυπηρετεί τη διδακτική πράξη. Γιατί εφόσον προηγείται η παραγώγιση είναι εύλογο, να ακολουθήσει αμέσως το αόριστο ολοκλήρωμα ως αποτέλεσμα της αντίστροφης διαδικασίας της παραγώγισης. Επιπλέον με τη διάταξη αυτή της ύλης είναι δυνατόν από πολύ νωρίς να γίνονται εφαρμογές του ολοκληρωτικού λογισμού οι οποίες ανάγονται στη λύση απλών «διαφορικών εξισώσεων». Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων θα γίνεται κατά περίπτωση με: -Την ανακάλυψη της παράγουσας -Την παραγοντική ολοκλήρωση -Τη μέθοδο της αντικατάστασης
Ορισμένο Ολοκλήρωμα	Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος και τη σύνδεσή του με την έννοια της παραγώγισης	
Εμβαδόν επιπέδου χωρίου	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να	Με τον υπολογισμό εμβαδών υλοποιείται ο σημαντικότερος

Όγκος εκ περιστροφής	χρησιμοποιούν το ορισμένο ολοκλήρωμα για να υπολογίζουν εμβαδά επιπέδων χωρίων και όγκους εκ περιστροφής	στόχος της διδασκαλίας της ενότητας του ολοκληρώματος. Ως εφαρμογές θα υπολογιστούν το εμβαδόν του κύκλου, το εμβαδόν της έλλειψης και ο όγκος της σφαίρας
Διαφορικές Εξισώσεις πρώτης τάξης	Οι μαθητές πρέπει: Να μπορούν να χρησιμοποιούν τα ολοκληρώματα για τη λύση απλών διαφορικών εξισώσεων	Θα δοθούν απλά παραδείγματα από τα Μαθηματικά και τις άλλες επιστήμες (Φυσική, Χημεία, Βιολογία κτλ.) στα οποία δίνεται ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους και ζητείται η συνάρτηση που εκφράζει το νόμο της μεταβολής του μεγέθους. Για παράδειγμα: Να βρεθεί η θερμοκρασία ενός σώματος συναρτήσει του χρόνου, αν είναι γνωστό ότι ο ρυθμός μεταβολής της είναι ανάλογος αυτής και επιπλέον δίνεται η αρχική της τιμή. Σε καμιά περίπτωση δεν πρέπει η διδασκαλία των διαφορικών εξισώσεων να επεκταθεί πέρα από απλές διαφορικές εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών πρώτης τάξης.

III. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Ωρες: 4 την εβδομάδα

Περιεχόμενα	Στόχοι	Οδηγίες
1. ΠΙΝΑΚΕΣ		
Η έννοια του πίνακα.	Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν την έννοια, το συμβολισμό των στοιχείων του και τη χρησιμότητά του πίνακα.	Όλες οι έννοιες καθώς και οι πράξεις με πίνακες θα εισαχθούν μεσω συγκεκριμένων παραδειγμάτων τα οποία θα δείχνουν την αναγκαιότητα της αντίστοιχης έννοιας ή πράξης. Θα τονιστεί στους μαθητές η χρησιμότητα των πινάκων στη λύση προβλημάτων της καθημερινής ζωής καθώς επίσης και προβλημάτων από άλλες επιστήμες. Έτσι για παράδειγμα θα αναφερθεί ότι: • Με χρήση πινάκων "αποθηκεύουμε" και επεξεργαζόμαστε συστηματικά πληροφορίες σε ηλεκτρονικούς υπολογιστές. • Η ανάλυση μεγάλων ηλεκτρονικών κυκλωμάτων όπως τα VLSI διευκολύνεται με χρήση πινάκων. • Οι πίνακες μπορούν να αποτελέσουν ένα χρήσιμο εργαλείο για τη μελέτη των γεωμετρικών μετασχηματισμών καθώς και για την περιγραφή πολύπλοκων δικτύων.
Πράξεις με πίνακες	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να εκτελούν πράξεις με πίνακες και να γνωρίζουν τις ιδιότητες των πράξεων.	Στις πράξεις με πίνακες θα δοθεί έμφαση στην τεχνική της εκτέλεσής τους. Επίσης θα τονιστούν οι προϋποθέσεις που καθιστούν

	Να κατανοήσουν πότε ένας τετραγωνικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος.	δυνατές τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού πινάκων. Θα τονιστεί όπου υπάρχει η αναλογία των ιδιοτήτων των πράξεων των πινάκων με εκείνες των πραγματικών αριθμών.
2. ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ		
Επίλυση γραμμικών συστημάτων.	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να γράφουν ένα γραμμικό σύστημα στη μορφή $A \cdot X = B$ με τη βοήθεια πινάκων και αντιστρόφως.	Η έννοια του γραμμικού συστήματος θα εισαχθεί με παραδείγματα και θα τονιστεί η εμφάνιση γραμμικών συστημάτων στη μελέτη προβλημάτων όχι μόνο μαθηματικών αλλά και από άλλες επιστήμες όπως για παράδειγμα από τη Μηχανική, Ηλεκτρονική, Οικονομία, κτ.λ. Είναι σκόπιμο να αναφερθεί ότι η δυνατότητα γραφής ενός γραμμικού συστήματος σε μορφή μιας εξίσωσης πινάκων μας επιτρέπει να επιλύσουμε τα συστήματα με κατάλληλα προγράμματα ηλεκτρονικών υπολογιστών. Σε ένα τέτοιο πρόγραμμα δίνονται ως δεδομένα (input) **α.** Ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων του συστήματος και **β.** Οι σταθεροί όροι. Μετά την επεξεργασία των στοιχείων μας το πρόγραμμα μας δίνει ως αποτέλεσμα (output) τη λύση του συστήματος εφόσον υπάρχει μοναδική λύση, ή κατάλληλο μήνυμα αν υπάρχουν περισσότερες από μία λύσεις ή αν δεν υπάρχει καμία λύση.

	Να μπορούν να εφαρμόζουν τον αλγόριθμο του Gauss για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος.	Με γραμμοπράξεις οι μαθητές θα βρίσκουν τον αντίστροφο ενός πίνακα (αν υπάρχει).
	Να κατανοήσουν την έννοια της ορίζουσας και τον τρόπο υπολογισμού της.	Θα περιοριστούμε σε ορίζουσες 2×2 και 3×3 πινάκων.
	Να μπορούν να εφαρμόζουν τον κανόνα Cramer στην επίλυση γραμμικών συστημάτων $\nu\times\nu$.	Ως άσκηση θα βρούν οι μαθητές τον αντίστροφο ενός 2×2 πίνακα.
Μετασχηματισμοί στο επίπεδο με τη βοήθεια πινάκων	Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν την έννοια του γραμμικού μετασχηματισμού. Να βρίσκουν τους πίνακες μετασχηματι σμού στις παρακάτω περιπτώσεις: • συμμετρία • μεταφορά • στροφή.	Θα ζητείται η εύρεση της εικόνας ενός σχήματος όταν δίνεται ο πίνακας μετασχηματισμού του. Επίσης θα τονιστεί ότι ο πίνακας μετασχηματισμού καθορίζεται από τις εικόνες των μοναδιαίων διανυσματων $\vec{i}=(1,0)$ και $\vec{j}=(0,1)$
3.ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ εννοια και ισότητα μιγαδικών	Οι μαθητές πρέπει να γνωρίσουν την έννοια του μιγαδικού αριθμού και να διαπιστώνουν αν δύο μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι.	Αρχικά θα παρουσιαστεί η ανάγκη διεύρυνσης του **R** σε ένα σύνολο C στο οποίο να έχει λύση η εξίσωση $x^2+1=0$. Υποθέτουμε ότι το νέο σύνολο C είναι εφοδιασμένο με τις ίδιες πράξεις με τις οποίες είναι εφοδιασμένο το **R** και ότι οι πράξεις αυτές έχουν τις ίδιες ιδιότητες και στα δύο σύνολα. Επιπλέον υποθέτουμε ότι το C περιέχει μια λύση της εξίσωσης $x^2+1=0$ που τη συμβολίζουμε με **i**. Επομένως το νέο σύνολο θα περιέχει τους πραγματικούς αριθμούς και στοιχεία της

		μορφής $\alpha+\beta i$ με $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ και $i^2=-1$. Κάθε στοιχείο της μορφής $\alpha+\beta i$ με $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ ονομάζεται μιγαδικός αριθμός Η **γεωμετρική εικόνα** του μιγαδικού $\alpha+\beta i$ είναι το σημείο A με συντεταγμένες (α,β).
Πράξεις με μιγαδικούς-Συζυγής μιγαδικού.	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να βρίσκουν το αθροισμα, το γινόμενο και το πηλίκο μιγαδικών αριθμών.	Θα δοθεί έμφαση στην τεχνική της εκτέλεσης των πράξεων και στη γεωμετρική τους ερμηνεία. Η έννοια του συζυγή ενός μιγαδικού διευκολύνει την πράξη της διαίρεσης.
Τετραγωνική ρίζα μιγαδικού	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να υπολογίζουν την τετραγω- νική ρίζα μιγαδικού αριθμού.	Ως άσκηση λογισμού θα ζητηθεί από τους μαθητές να βρούν την τετραγωνική ρίζα ενός μιγαδικού αριθμού. Θα διαπιστωθεί ότι δεν υπάρχει μοναδικός μιγαδικός z έτσι ώστε $z^2=z_0$ και θα γίνει κατανοητό γιατί δε χρησιμοποιούμε το γνωστό σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας.
Μέτρο μιγαδικού αριθμού.	Οι μαθητές πρέπει να γνωρίσουν την έννοια του μέτρου ενός μιγαδικού αριθμού και τις ιδιότητες του.	Θα χρησιμοποιηθεί οτι, η απόσταση των εικόνων δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίση με το μέτρο της διαφοράς τους, για την επίλυση απλών προβλημάτων γεωμετρικών τόπων.
Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού	Οι μαθητές πρέπει να γνωρίσουν την έννοια του ορίσματος ενός μιγαδικού αριθμού και να τον γράφουν σε τριγωνομετρική μορφή χρησιμοποιώντας το μέτρο και το όρισμά του.	Θα αναφερθεί ότι η τριγωνομετρική μορφή ενός μιγαδικού είναι η γραφή του με τις συντεταγμένες της εικόνας του στο επίπεδο.
	Να πολλαπλασιάζουν και να διαιρούν αριθμούς που είναι	Θα αναφερθεί το θεώρημα De Moivre χωρις να αποδειχτεί.

	γραμμένοι σε τριγωνομετρική μορφή. Να μπορούν να υπολογίζουν τη δύναμη ενός μιγαδικού αριθμού με τη βοήθεια του θεωρήματος De Moivre.	
Πολυωνυμικές εξισώσεις	Να μπορούν να επιλύουν πολυωνυμικές εξισώσεις με πραγματικούς συντελεστές καθώς και εξισώσεις της μορφής $z^{\nu}=a$.	Θα τονιστεί ιδιαίτερα ότι οι μιγαδικές ρίζες μιας πολυωνυμικής εξίσωσης με πραγματικούς συντελεστές είναι συζυγείς. Συνεπώς μια εξίσωση περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα. Να λυθεί, για παράδειγμα, η εξίσωση $z^3=i$ και να αναφερθούν οι ιδιότητες των κυβικών ριζών της μονάδας.

4. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ		
Η έννοια της συνάρτησης.	Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν τον ορισμό και το συμβολισμό της συνάρτησης. Να μπορούν να βρίσκουν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f όταν δίνεται ο τύπος της και να γνωρίζουν πότε δύο συναρτήσεις είναι ίσες. Να μπορούν να βρίσκουν, από τη γραφική παράσταση μιάς συνάρτησης, το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και την τιμή της σε ένα x_0.	Η έννοια της συνάρτησης είναι σημείο αναφοράς για τα επόμενα Οι περισσότερες έννοιες που αναφέρονται εδώ είναι ήδη γνωστές στους μαθητές. Έτσι η διδασκαλία πρέπει να δίνει "αφορμές" ώστε να ανατρέχουν στα βιβλία των προηγούμενων τάξεων για να επαναφέρουν στη μνήμη τους έννοιες που θα τους χρειαστούν στα επόμενα. Θα δοθούν απλά παραδείγματα για την εύρεση του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης, στα οποία θα τονιστεί ότι αυτό μπορεί να είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων
	Οι μαθητές να μπορούν να βρίσκουν το άθροισμα, το γινόμενο, το πηλίκο και τη σύνθεση απλών συναρτήσεων	Η σύνθεση συναρτήσεων να εισαχθεί με παράδειγμα. Επισημαίνεται ότι για την κατανόηση της έννοιας της σύνθεσης συναρτήσεων και

		την αξιοποίησή της αργότερα είναι αρκετά μερικά απλά παραδείγματα.
Οριο συνάρτησης	Οι μαθητές να κατανοήσουν την έννοια του ορίου μιας συνάρτησης f όταν $x \to x_0$ Να γνωρίζουν τις βασικές ιδιότητες του ορίου μιας συνάρτησης και με τη βοήθεια τους να υπολογίζουν τα όρια απλών συναρτήσεων.	Η έννοια του ορίου μιας συνάρτησης f όταν $x \to x_0$ εισάγεται "διαισθητικά" και δε δίνεται ο αυστηρός μαθηματικός ορισμός. Η κατανόηση της έννοιας του ορίου μιας συνάρτησης στο x_0. μπορεί να επιτευχθεί, είτε με εποπτεία, από τη γραφική παράσταση, είτε με παρατή ρηση κατάλληλου πίνακα τιμών της συνάρτησης. Επισημαίνεται ότι η διδασκαλία του ορίου μιας συνάρτησης δεν είναι αυτοσκοπός, αλλά στοχεύει στην προετοιμασία για την εισαγωγή της παραγώγου και του ολοκληρώματος. Γιαυτό πρέπει να αποφευχθεί η άσκοπη "ασκησιολογία" και να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση μόνο στις ασκήσεις που έχουν πρακτικές εφαρμογές και εκείνες που θα βοηθήσουν αργότερα στην κατανόηση της έννοιας της παραγώγου.
	Να μπορούν να βρίσκουν τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης (αν υπάρχουν).	Εδώ μελετάται η συμπεριφορά μιας συνάρτησης όταν οι τιμές της αυξάνονται ή μειώνονται απεριόριστα καθώς το $x \to x_0 \in R$. Η έννοια του μή πεπερασμένου ορίου εισάγεται και πάλι εποπτικά με κύριο στόχο να να χρησιμοποιηθεί για την κατανόηση της έννοιας της κατακόρυφης ασύμπτωτης μιας συνάρτησης.
	Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν την έννοια του	Η έννοια του ορίου μιας

	ορίου μιας συνάρτησης όταν $x \to \pm\infty$, την έννοια της οριζόντιας ασύμπτωτης στο $+\infty$ και στο $-\infty$ και να μπορούν να βρίσκουν (αν υπάρχει) την οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και στο $-\infty$. Να κατανοήσουν τη συμπεριφορά της συνάρτη σης για πολύ μικρές ή για πολύ μεγάλες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής	συνάρτησης όταν $x \to \pm\infty$ σκοπό έχει την κατανόηση της οριζόντιας ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης στο $+\infty$ και στο $-\infty$. Για το λόγο αυτό και εδώ η έννοια εισάγεται εποπτικά και δε δίνεται μαθηματικός ορισμός. Για την καλύτερη εμπέδωση των εννοιών αυτών θα χρησιμοποιηθούν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων όπως για παράδειγμα $\frac{1}{x}, \frac{1}{x-2}, x^2$ κλπ.
Συνέχεια συνάρτησης	Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν την έννοια της συνέχειας συνάρτησης σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.	Η έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης εισάγεται και αυτή εποπτικά με κατάλληλο παράδειγμα και ακολούθως δίνεται ο μαθηματικός ορισμός. Υπενθυμίζεται ότι οι συναρτήσεις που μελετάμε ορίζονται σε διάστημα ή σε ένωση διαστημάτων. Γιαυτό δεν εξετάζεται η συνέχεια μιας συνάρτησης σε μεμονωμένο σημείο. Θα τονιστεί, ότι το άθροισμα, το γινόμενο, το πηλίκο, και η σύνθεση συνεχών συναρτή- σεων, είναι επίσης συνεχής συνάρτηση. Θα αναφερθούν τα βασικά θεωρήματα των συνεχών συναρτήσεων δηλαδή: Bolzano, ενδιάμεσης τιμής, μέγιστης και ελάχιστης τιμής και θα ερμηνευτούν γεωμετρι κά
Εκθετική -Λογαριθμική συνάρτηση	Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν τις ιδιότητες της εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης και να σχεδιά-	Θα τονιστεί η σημασία της εκθετικής συνάρτησης $y = e^x$ ως μοντέλου για την περιγραφή φαινομένων σε

	ζουν τις γραφικές τους παραστάσεις.	διάφορες επιστήμες. Για παράδειγμα στη Φυσική η εκθετική συνάρτηση περιγράφει διαδικασίες διάσπασης και απόσβεσης, στην Οικονομία, και Βιολογία αυξητικές διαδικασίες κτλ. Με την ευκαιρία της μελέτης της εκθετικής συνάρτησης θα αναφερθεί και η έννοια της αντίστροφης συνάρτησης. Στη συνέχεια η λογαριθμική συνάρτηση ορίζεται ως αντίστροφη της εκθετικής.
5.ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ Παράγωγος συνάρτησης στο x_0	Να κατανοήσουν την έννοια της παραγώγου σε ένα σημείο καθώς και τη φυσική και γεωμετρική σημασία της. Να κατανοήσουν ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης ορίζεται μόνο στα σημεία στα οποία η συνάρτηση είναι συνεχής και να βρίσκουν την εξίσωσή της.	Με αφορμή την προσπάθεια για τον ορισμό της εφαπτομένης μιας καμπύλης $y=f(x)$ σ' ένα σημείο της εισάγεται η έννοια της παραγώγου μιας συνάρτησης σ'ένα σημείο της. Έτσι καθορίζεται η γεωμετρική σημασία της παραγώγου της f σε ένα σημείο της που είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο σημείο αυτό. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται και στη φυσική σημασία της παραγώγου της $y=f(x)$ σ' ένα σημείο της x_0 που είναι ο ρυθμός μεταβολής της εξαρτημένης μεταβλητής y ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή x στο σημείο x_0. Ιδιαίτερη σημασία θα δοθεί στην κατανόηση των εννοιών οριακό κόστος, οριακό κέρδος, οριακή ταχύτητα κτλ.

Παράγωγος συνάρτηση	Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν τους κανόνες παραγώγισης βασικών συναρτήσεων καθώς και τον κανόνα της αλυσίδας.και να βρίσκουν με τη βοήθεια τους παραγώγους συναρτήσεων.	Να χρησιμοποιούν τους κανόνες παραγώγισης για να βρίσκουν την εξίσωση της εφαπτομένης σε ένα σημείο μιας καμπύλης που δεν μπορεί να γραφεί στη μορφή $y = f(x)$. (πεπλεγμένη συνάρτηση)
	Να επιλύουν προβλήματα ρυθμού μεταβολής.	Για την εύρεση του ρυθμού μεταβολής θα χρησιμοποιηθούν παραδείγματα και από τη μέτρηση στερεών έτσι ώστε οι μαθητές να επαναλάβουν τους τύπους μέτρησης στερεών και να ασκηθούν στην παραγώγιση.
Μελέτη συνάρτησης	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να προσδιορίζουν τα διαστήματα στα οποία μια συνάρτηση είναι • σταθερή, • γνησίως αύξουσα ή • γνησίως φθίνουσα • κυρτή ή κοίλη και να βρίσκουν τα • τοπικά ακρότατα και τα σημεία καμπής της.	Επισημαίνεται ότι για μια συνεχή συνάρτηση το πρόσημο της παραγώγου της σε ανοικτό διάστημα είναι αρκετο για να προσδοοριστεί η μονοτονία της στο στο αντίστοιχο κλειστό διάστημα. Θα τονιστεί ως συνέπεια των παραπάνω η δυνατότητα εύρεσης του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης. Θα δοθούν πραγματικά προβλήματα στα οποία θα ζητείται το μέγιστο ή το ελάχιστο μιας συνάρτησης
	Να χρησιμοποιούν τους κανόνες De l ' Hospital για τον υπολογισμό ορίων.	
	Να μπορούν να βρίσκουν τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης και να την σχεδιάζουν.	
6. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ		

Αρχική συνάρτηση- Αόριστο ολοκλήρωμα	Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν τις έννοιες • παράγουσα ή αρχική συνάρτηση • αόριστο ολοκλήρωμα και να μπορούν να υπολογίζουν απλά αόριστα ολοκληρώματα με τη βοήθεια των μεθόδων ολοκλήρωσης.	Εδώ ορίζεται πρώτα η παράγουσα μιας συνάρτησης και στη συνέχεια εισάγεται η έννοια του ορισμένου ολοκλη- ρώματος. Ο τρόπος αυτός εισαγωγής μολονότι δε συμφωνεί με την ιστορική εξέλιξη του ολοκληρώματος, εξυπηρετεί τη διδακτική πράξη. Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων θα γίνεται κατά περίπτωση με • την ανακάλυψη της παράγουσας ή • την παραγοντική ολοκλή ρωση ή • με αλλαγή μεταβλητής
	Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος και τη σύνδεσή του με την έννοια της παράγουσας.	
Εμβαδό επιπέδου χωρίου. Ογκοι εκ περιστροφής.	Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να χρησιμοποιούν το ορισμένο ολοκλήρωμα για να υπολογίζουν • εμβαδά επιπέδων χωρίων • όγκους στερεών που παράγονται από πλήρη περιστροφή ενός χωρίου γύρω από τον άξονα $x'x$	Οι μαθητές θα επαναλάβουν τις γνώσεις τους στη μέτρηση επιφανειών και όγκων στερεών. Θα χρησιμοποιήσουν και την ολοκλήρωση για να υπολογίζουν όγκους και επιφάνειες.
Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως	Να χρησιμοποιούν τα ολοκληρώματα για τη λύση απλών διαφορικών εξισώ σεων πρώτης τάξης	Θα δοθούν προβλήματα στα οποία δίνεται ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους y ως προς ένα άλλο μέγεθος x και ζητείται η τιμή του μεγέθους y όταν το x παίρνει συγκεκριμένη τιμή x_0. Κρίνεται απαραίτητο να καταβληθεί προσπάθεια ώστε οι μαθητές να εξοικειωθούν με τις τεχνικές λύσης τέτοιων προβλημάτων. Θα πρέπει με καταλληλα επιλεγμένα παραδείγματα οι μαθητές να αποκτήσουν ευχέρεια

		• στη δημιουργία του μαθηματικού μοντέλου (συνάρτησης) που περιγράφει το πρόβλημα • στη λύση του μαθηματικού προβλήματος με τις τεχνικές του Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού που έχουν γνωρίσει.

Η ισχύς της απόφασης αυτής αρχίζει από το σχολ. έτος 2000 - 2001.

Η απόφαση αυτή να δημοσιευθεί στην Εφημερίδα της Κυβερνήσεως.

Αθήνα, 12 Μαΐου 1999

Ο ΥΠΟΥΡΓΟΣ

ΓΕΡΑΣΙΜΟΣ ΑΡΣΕΝΗΣ

ΕΘΝΙΚΟ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟ

ΕΦΗΜΕΡΙΔΑ ΤΗΣ ΚΥΒΕΡΝΗΣΕΩΣ

ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΟΥ 34 * ΑΘΗΝΑ 104 32 * TELEX 223211 YPET GR * FAX 52 34 312
ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ: http: www.et.gr
INTERNET: hol.gr
e-mail: nvas @ hol.gr

ΥΠΗΡΕΣΙΕΣ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΣΗΣ ΠΟΛΙΤΩΝ

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ
Σολωμού 51

Πληροφορίες δημοσιευμάτων Α.Ε. - Ε.Π.Ε.	5225 761 5230 841
Πληροφορίες δημοσιευμάτων λοιπών Φ.Ε.Κ.	5225 713 5249 547
Πώληση Φ.Ε.Κ.	5239 762
Φωτοαντίγραφα παλαιών Φ.Ε.Κ.	5248 141
Βιβλιοθήκη παλαιών Φ.Ε.Κ.	5248 188
Οδηγίες για δημοσιεύματα Α.Ε. - Ε.Π.Ε.	5248 785
Εγγραφή Συνδρομητών Φ.Ε.Κ. και αποστολή Φ.Ε.Κ.	5248 320

ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΑ ΓΡΑΦΕΙΑ
ΠΩΛΗΣΗΣ Φ.Ε.Κ.

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ Βασ. Όλγας 227 - Τ.Κ. 54100	(031) 423 956
ΠΕΙΡΑΙΑΣ Νικήτα 6-8 Τ.Κ. 185 31	4135 228
ΠΑΤΡΑ Κορίνθου 327 - Τ.Κ. 262 23	(061) 6381 100
ΙΩΑΝΝΙΝΑ Διοικητήριο Τ.Κ. 450 44	(0651) 87215
ΚΟΜΟΤΗΝΗ Δημοκρατίας 1 Τ.Κ. 691 00	(0531) 22 858
ΛΑΡΙΣΑ Διοικητήριο Τ.Κ. 411 10	(041) 597449
ΚΕΡΚΥΡΑ Σαμαρά 13 Τ.Κ. 491 00	(0661) 89 127 / 89 120
ΗΡΑΚΛΕΙΟ Πλ. Ελευθερίας 1, Τ.Κ. 711 10	(081) 396 223
ΛΕΣΒΟΣ Πλ. Κωνσταντινουπόλεως Τ.Κ. 811 00 Μυτιλήνη	(0251) 46 888 / 47 533

ΤΙΜΗ ΦΥΛΛΩΝ ΕΦΗΜΕΡΙΔΟΣ ΤΗΣ ΚΥΒΕΡΝΗΣΕΩΣ	
	- Μέχρι 8 σελίδες 200 δρχ.
	- Από 8 σελίδες και άνω προσαύξηση 100 δρχ. ανά 8σέλιδο ή μέρος αυτού

Τεύχος	Κ.Α.Ε. Προϋπολογισμού 2531	Κ.Α.Ε. εσόδου υπέρ ΤΑΠΕΤ 3512
Α΄ (Νόμοι, Π.Δ., Συμβάσεις κ.λπ.)	60.000 δρχ.	3.000 δρχ.
Β΄ (Υπουργικές αποφάσεις κ.λπ.)	70.000 »	3.500 »
Γ΄ (Διορισμοί, απολύσεις κ.λπ. Δημ. Υπαλλήλων)	15.000 »	750 »
Δ΄ (Απαλλοτριώσεις, πολεοδομία κ.λπ.)	70.000 »	3.500 »
Αναπτυξιακών Πράξεων (Τ.Α.Π.Σ.)	30.000 »	1.500 »
Ν.Π.Δ.Δ. (Διορισμοί κ.λπ. προσωπικού Ν.Π.Δ.Δ.)	15.000 »	750 »
Παράρτημα (Προκηρύξεις θέσεων ΔΕΠ κ.τλ.)	5.000 »	250 »
Δελτίο Βιομηχανικής Ιδιοκτησίας (Δ.Ε.Β.Ι.)	10.000 »	500 »
Ανωτάτου Ειδικού Δικαστηρίου (Α.Ε.Δ.)	3.000 »	150 »
Προκηρύξεων Α.Σ.Ε.Π.	10.000 »	500 »
Ανωνύμων Εταιρειών & Ε.Π.Ε.	250.000 »	12.500 »
ΓΙΑ ΟΛΑ ΤΑ ΤΕΥΧΗ ΕΚΤΟΣ Α.Ε. & Ε.Π.Ε.	250.000 »	12.500 »

* Οι συνδρομές του εσωτερικού προπληρώνονται στα Δημόσια Ταμεία που δίνουν αποδεικτικό είσπραξης (διπλότυπο) το οποίο με τη φροντίδα του ενδιαφερομένου πρέπει να στέλνεται στην Υπηρεσία του Εθνικού Τυπογραφείου.
* Οι συνδρομές του εξωτερικού επιβαρύνονται, πέραν των ανωτέρω αναφερομένων ποσών, με τα ταχυδρομικά τέλη και μπορεί να στέλνονται με επιταγή και σε ανάλογο συνάλλαγμα στο Διευθυντή Διαχείρισης του Εθνικού Τυπογραφείου.
* Η πληρωμή του υπέρ ΤΑΠΕΤ ποσοστού που αντιστοιχεί σε συνδρομές, εισπράττεται από τα Δημόσια Ταμεία.
* Οι συνδρομητές του εξωτερικού μπορούν να στέλνουν το ποσό του ΤΑΠΕΤ μαζί με το ποσό της συνδρομής.
* Οι Νομαρχιακές Αυτοδιοικήσεις, οι Δήμοι, οι Κοινότητες ως και οι επιχειρήσεις αυτών πληρώνουν το μισό χρηματικό ποσό της συνδρομής και ολόκληρο το ποσό υπέρ του ΤΑΠΕΤ.
* Η συνδρομή ισχύει για ένα χρόνο, που αρχίζει την 1η Ιανουαρίου και λήγει την 31η Δεκεμβρίου του ίδιου χρόνου. Δεν εγγράφονται συνδρομητές για μικρότερο χρονικό διάστημα.
* Η εγγραφή ή ανανέωση της συνδρομής πραγματοποιείται το αργότερο μέχρι τον Μάρτιο κάθε έτους.
* Αντίγραφα διπλοτύπων, ταχυδρομικές επιταγές και χρηματικά γραμμάτια δεν γίνονται δεκτά.

Οι υπηρεσίες εξυπηρέτησης των πολιτών λειτουργούν καθημερινά από 08.00΄ έως 13.00΄

(ΑΠΟ ΤΟ ΕΘΝΙΚΟ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟ)